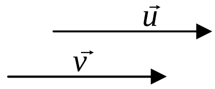
##Calcul vectoriel***الحساب المتجهي

Résumé du cours ملخص الدرس

1)تساوي متجهتين:

تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متساويتين: إذا كان
-- لهما نفس الاتجاه.



(يعني حاملاهما متوازيان)

-- لهما نفس المنحى.
-- لهما نفس المنظم.

خاصيات و نتائج:

لتكن A وB وC وD نقط غير مستقيمية من المستوى.

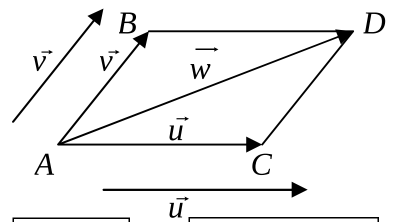
$\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}}$ يكافئ أن الرباعي ABDC متوازي أضلاع

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}}$ يكافئ أن $\boxed{\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}}$ يكافئ أن للقطعتين $[AD]$ و $[BC]$ نفس المنتصف.

2)مجموع متجهتين: (علاقة شال.)

لتكن A وB وC ثلاثة نقط غير مستقيمية من المستوى. مجموع المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو المتجهة $\overrightarrow{AD}$ بحيث يكون الرباعي ABDC متوازي أضلاع.



ونكتب: $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}}$ أو $\boxed{\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}}$

ملاحظة:

من أجل إنشاء المتجهة: $\vec{u}+\vec{v}$
نزيح $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل ونكون متوازي أضلاع.

خاصيات ونتائج:

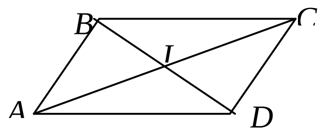
*) $\boxed{\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}}$ و $\boxed{\overrightarrow{AB}=\vec{0}}$ تكافئ $A=B$

*) $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$ (علاقة شال.)

*) لتكن A وB وC وD نقط غير مستقيمية من المستوى.
يكون الرباعي $(ABCD)$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا تحققت إحدى الشروط التالية:

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}}$ أو $\boxed{\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}}$ أو $\boxed{\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}$

أوالقطران $[AC]$ و $[BD]$ لهمانفس المنتصف I.



Exércices et problèmes-------------------------تمارين و مسائل

التمرين رقم1 :

ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة $[AB]$. D و E نقطتان من المستوى بحيث: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AC}$.

1) أنشئ النقط I و D و E.
2) بين أن النقط I و D و E مستقيمية.

Réponse

التمرين رقم2 :

ليكن ABC مثلثا و F منتصف القطعة $[BC]$. K و E نقطتان من المستوى بحيث: $\overrightarrow{CK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

1) أنشئ النقط F و K و E.
2) بين أن النقط F و K و E مستقيمية.

Réponse

التمرين رقم 3 :

ليكن ABC مثلثا. I و J و K هي على التوالي منتصفات القطع $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$ على التوالي. و L نقطة من المستوى بحيث يكون الرباعي $KBJL$ متوازي أضلاع .

1) أنشئ النقطة L .
2) بين أن J منتصف $[IL]$.
3) إستنتج أن الرباعي $ALCI$ متوازي أضلاع.

Réponse

التمرين رقم 4 :

A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية و E و F نقطتان من المستوى بحيث : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF}=3\,\overrightarrow{AC}$.

1)أنشئ الشكل
2) لتكن P هي نقطة تقاطع المستقيمين (BC) و (EF)، بين أن:
$\overrightarrow{AP}=2\,\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Réponse

التمرين رقم 5 :

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه G.

1) لتكن النقطتين E و F منتصفا القطعتين $[AB]$ و $[BC]$ على التوالي.
بين أن $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CE}=\vec{0}$.

2) نعتبر النقط I و H و K بحيث $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{CE}$ و K منتصف القطعة $[HG]$ و I منتصف القطعة $[AD]$.

أ-- بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[HE]$.
ب-- ما هي طبيعة الرباعي $AGIH$ ؟
ج-- إستنتج أن $\overrightarrow{DA}=\frac{4}{3}\overrightarrow{DK}$.

Réponse

التمرين رقم 6 :

ليكن $ABCD$ رباعي محدب بحيث $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{BC}$ و M و N منتصفي القطعتين $[AB]$ و $[DC]$ على التوالي .

1) بين أن $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BC}$.
2) ليكن I و P منتصفي القطعتين $[BC]$ و $[BD]$ على التوالي و J النقطة بحيث $\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$. أكتب كلا من $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IP}$ بدلالة $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ واستنتج أن النقط I و P و J مستقيمية .

Réponse

Résumé du cours ملخص الدرس

3) ضرب متجهة في عدد حقيقي:

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي غير منعدم

جداء المتجهة $\vec{u}$ والعدد الحقيقي k هو المتجهة $k\vec{u}$ حيث:

-- $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الإتجاه.

-- $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$

-- منحى $k\vec{u}$ هو منحى $\vec{u}$ إذا كان $k>0$.

-- منحى $k\vec{u}$ هو عكس منحى $\vec{u}$ إذا كان $k<0$.

قواعد حسابية:

مهما تكن المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ومهما يكن العددان الحقيقيان α و β. لدينا:

$$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$$

$$(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$$

$$\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$$

$\alpha\vec{u}=\vec{0}$ يكافئ $\alpha=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$

4) إستقامية متجهتين:

لتكن A وB وC وD 4 نقط من المستوى.

تكون $\vec{AB}$ و$\vec{CD}$ مستقيميتين إذاوفقط إذا كان المستقيمان (AB) و(CD) متوازيان.

** تكون متجهتين غير منعدمتين مستقيميتين إذا و فقط إذا كان كان لهما نفس الإتجاه.

خاصيات:

-- تكون متجهتان غير منعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{v}=k\vec{u}$.

-- تكون ثلاث نقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث: $\vec{AC}=k\vec{AB}$.

** العدد الحقيقي k يسمى أفصول النقطة C في المعلم (A,B) .

5) منتصف قطعة:

I منتصف القطعة $[AB]$ يعني:

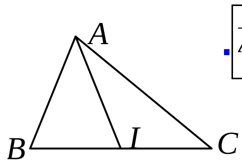
(* $\vec{AI}=\vec{IB}$ (* $\boxed{\vec{IA}=-\vec{IB}}$ (* $\boxed{\vec{AI}=\frac{1}{2}\vec{AB}}$

(* $\boxed{\vec{BI}=\frac{1}{2}\vec{BA}}$ (* $\boxed{\vec{IA}+\vec{IB}=\vec{0}}$

ملاحظة:

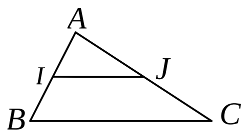
** ليكن (ABC) مثلثا و I منتصف $[BC]$

لدينا $\boxed{\vec{AI}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})}$.



**ليكن (ABC) مثلثا. I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$

لدينا $\boxed{\vec{IJ}=\frac{1}{2}\vec{BC}}$



Exércices et problèmes---------------------------تمارين و مسائل

التمرين رقم 7 :

ليكن ABC مثلثا. نعتبر النقطتين M و N المعرفتين بما يلي: $k\in\mathbb{R}$

$$\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AB}+(1-k)\vec{AC} \quad \text{و} \quad \vec{AN}=\frac{1}{2}\vec{AC}+(1-k)\vec{AB}$$

1) أنشئ النقطتين M و N في حالة $k=2$.

2) ما هي قيم k التي يكون من أجلها:

أ-- $M=N$ ؟

ب--الرباعي $BCMN$ متوازي أضلاع ؟

ج-- الرباعي $BCNM$ متوازي أضلاع؟

Réponse

التمرين رقم 8 :

ليكن ABC مثلثا و E نقطة بحيث: $\vec{AE}=3\vec{AB}+4\vec{AC}$.

1)أنشئ الشكل.

2) لتكن I نقطة تقاطع المستقيمين (AE) و (BC). نضع :

$\vec{AE}=x\vec{AI}$ و $\vec{CI}=y\vec{IB}$ بحيث: $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

أ-- بين أن: $(x-7)\vec{AI}=(3-4y)\vec{IB}$.

ب—حدد وضع النقطة I على القطعة $[AE]$.

Réponse

التمرين رقم 9 :

ليكن ABC مثلثا و E و F نقطتين بحيث: $\vec{EA}=b\vec{EC}$ و $\vec{CF}=a\vec{BA}$

مع a و b عددان حقيقيان و $b\neq 1$.

1) a) بين أن $\vec{EA}=\frac{b}{1-b}\vec{AC}$.

b) بين أن $\vec{BF}=-(1+a)\vec{AB}+\vec{AC}$.

c) بين أن $\vec{BE}=-\vec{AB}+\frac{b}{b-1}\vec{AC}$.

2) بين أن النقط B و E و F تكون مستقيمية إذا وفقط إذا كان $ab=-1$.

Réponse

التمرين رقم10 :

ليكن $ABCD$ رباعيا محدبا ، نربط كل عدد حقيقي x بنقطتين M و N من المستوى بحيث: $\vec{AM}=x\vec{AB}$ و $\vec{DN}=x\vec{DC}$.

1) أثبت أن: $\vec{MN}=x\vec{BC}+(1-x)\vec{AD}$.

2) نفترض أن: $\vec{AD}=3\vec{BC}$.

أ – ماهي طبيعة الرباعي $ABCD$؟

ب – أحسب $\vec{MN}$ بدلالة $\vec{BC}$ و x ثم أحسب MN بدلالة BC و x.

ج – ماهي قيمة x التي من أجلها تكون $M=N$؟

Réponse

التمرين رقم11 :

ليكن ABC مثلثا و B' و C' نقطتين من المستوى بحيث:

$\vec{AB'}=k\vec{AB}$ و $\vec{AC'}=(1-k)\vec{AC}$ مع $(k\in IR)$

نعتبر I منتصف القطعة $[B'C']$.

1) بين أن $\vec{AI}=\frac{1-k}{2}\vec{AC}+\frac{k}{2}\vec{AB}$.

2) نعتبر النقطة A' بحيث تكون النقطة I منتصف القطعة $[AA']$.

بين أن $\vec{BA'}=(1-k)\vec{BC}$

3) بين أن $\vec{IA}+k\vec{IB}+(1-k)\vec{IC}=\vec{0}$

Réponse