

9- لكل n من \mathbb{N}^* , نضع العدد المكون من n رقم كلها تساوي

$$7 (a_1 = 7; a_2 = 77; a_3 = 777; a_4 = 7777; \dots)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; a_n = \frac{7}{9} [10^n - 1]$$

10- بين أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا :

$$(1 \times 2) + (2 \times 3) + \dots + (n(n+1)) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$11- \text{بين أن : } \forall n \in \mathbb{N}^*; 6 \mid n^3 - n$$

$$12- \text{بين أن : } \forall n \in \mathbb{N}^*; 111 \mid 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$$

$$13- \text{بين أن : } \forall n \in \mathbb{N}^*; 6 \mid n(2n+1)(7n+1)$$

$$14- \text{بين أن : } \forall n \in \mathbb{N}^* (n \geq 4); 2^n \geq n^2$$

التمرين 7 : الإ استدلال بالخلف

(1) بين أن $\sqrt{2}$ عدد حقيقي لا جذري.

(2) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا: زوجي $n^2 \Rightarrow$ زوجي

التمرين 8 : الإ استدلال بالتكافؤ المتوالية

(1) بين أن: $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2; a^2 = b^2 \Leftrightarrow [(a=b) \wedge (a=-b)]$

(2) ليكن $a \in [1, +\infty[$ و $b \in [4, +\infty[$. بين أن :

$$\left(\sqrt{a-1} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2} \right) \Leftrightarrow ((a=2) \wedge (b=8))$$

التمرين 9 :

حدد من بين العبارات التالية, العبارات الصحيحة :

$$(P_1): \forall x \in \mathbb{N}^+, \exists y \in \mathbb{N}^+ / x = \sqrt{y}$$

$$(P_2): \exists y \in \mathbb{N}^+, \forall x \in \mathbb{N}^+ / x = \sqrt{y}$$

$$(P_3): \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / n = 2m$$

$$(P_4): \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} / n = 2m$$

$$(P_5): \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} / x + y = 5$$

$$(P_6): \exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N} / x + y = 5$$

التمرين 10 :

(1) لتكن P و Q عبارتين. أعط نفي التكافؤ $P \Leftrightarrow Q$ مستعملا

العمليات التالية : النفي و العطف و الفصل .

(2) أعط نفي العبارة:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2; xy = 0 \Leftrightarrow ((x=0) \vee (y=0))$$

التمرين 11 :

1. بين أن :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2; \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

2. ليكن $x \in \mathbb{N}$. بين أن :

$$\left[(x \neq \sqrt{3}) \wedge (x \neq -\sqrt{3}) \right] \Leftrightarrow \left[\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \neq 1 \right]$$

$$3. \text{بين أن : } \forall x \in \mathbb{N}; [x \neq 0] \Leftrightarrow \left[\sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2} \right]$$

التمرين 1 : تعتبر العبارة (P) التالية :

$$(P): \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; x^2 - xy + y^2 = 0$$

أ- أعط نفي العبارة (P).

ب- بين أن العبارة (P) خاطئة .

التمرين 2 : أكتب العبارات التالية باستعمال الرموز

والمكممات ثم حدد نفي كل واحدة منها.

(P₁): مربع أي عدد حقيقي هو أكبر من أو يساوي -1 .

(P₂): للحدودية $x^2 - 5x + 3$ على الأقل جذر حقيقي.

(P₃): يوجد عدد حقيقي أصغر قطعاً من كل الأعداد الحقيقية.

(P₄): إذا كان عدد حقيقي أصغر من أو يساوي -1, فإن هذا العدد

سالِب قطعاً.

التمرين 3 : الإ استدلال بالإستلزام المضاد للعكس

(1) ليكن a و b عددين حقيقيين غير متقابلين. بين أن:

$$a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{2} \neq -3$$

$$(2) \text{بين أن : } \forall x \in \mathbb{R}; x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$$

$$(Q): \forall (x, y) \in \mathbb{N}^2; y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$$

التمرين 4 : الإ استدلال بالمثال المضاد

بين أن العبارات التالية خاطئة :

(P) : لكل عدد حقيقي x لدينا : $x^2 < x$.

(Q) : إذا كان a و b عدداً حقيقيين بحيث $a^2 = b^2$ فإن $a = b$.

التمرين 5 : الإ استدلال بفصل الحالات

(1) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n , $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3.

(2) بين أن لكل عددين صحيحين نسبيين m و n , لدينا :

$m-n$ و $m+n$ لهما نفس الزوجية.

التمرين 6 : الإ استدلال بالترجع

$$1- \text{بين أن : } \forall n \in \mathbb{N}^*; 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2- \text{بين أن : } \forall n \in \mathbb{N}^*; 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3- \text{بين أن : } \forall n \in \mathbb{N}^*; 1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

4- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n , $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3.

5- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n , $2^n - 7^n$ يقبل القسمة على 5.

6- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n , $3^{2n} + 2^{6n-5}$ يقبل

القسمة على 11.

7- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n , $3^{2n+1} + 2^{2n+2}$ يقبل

القسمة على 7.

$$\forall a > 0; \forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+na$$

(a) بين أن :

(b) استنتج أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq 1+n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; (n+1)^n \geq 2n^n$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}(x+2) > 0$$

التمرين 22 : لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع :

$$S_n = 1+2+3+\dots+n$$

$$S_n' = 1+3+5+\dots+(2n-1)$$

$$S_n'' = 2+4+6+\dots+2n$$

$$1. \text{ بين بالترجع أن : } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. استنتج ، بدلالة n ، المجموعين S_n' و S_n'' .

3. أحسب المجموعين التاليين : $2+4+6+\dots+2006$ و $1+3+5+\dots+2005$

التمرين 23 : ليكن u التطبيق المعرف من \mathbb{N} نحو \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} u(0) = 2 \\ u(n+1) = 7u(n) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

1. أحسب $u(1)$ و $u(2)$.

2. بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u(n) = 2 \times 7^n$

التمرين 24 : ليكن u التطبيق المعرف من \mathbb{N} نحو \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} u(0) = -3 \\ u(n+1) = u(n) + \frac{7}{4} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

1. أحسب $u(1)$ و $u(2)$.

2. بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u(n) = -3 + \frac{7}{4}n$

التمرين 25 : لتكن P و Q و R ثلاث عبارات . أعط نفي كل من العبارتين التاليتين :

$$(P_1) : P \wedge (Q \vee R)$$

$$(P_2) : P \Rightarrow Q$$

\wedge : هو العطف المنطقي ؛ (\wedge و) .

\vee : هو الفصل المنطقي ؛ (\vee أو) .

التمرين 26 :

نعتبر العبارة التالية :

$$(P) : \forall x \in \mathbb{R}^*, -\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3 > 7 \Rightarrow x \leq 0$$

1. أكتب الإستلزام المضاد للعكس للعبارة (P) .

2. هل العبارة (P) صحيحة ؟ علل جوابك .

3. أكتب نفي العبارة (P) .

التمرين 27 :

بين أن :

$$\forall \alpha \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2} \right[, \exists n \in \mathbb{N} / \alpha < \sqrt{\frac{2n^2+n+1}{n^2+n+3}}$$

التمرين 28 : حدد القيمة المنطقية لكل من العبارات التالية :

A : كل الأعداد الحقيقية الموجبة لها جذر مربع موجب .

B : يوجد عدد حقيقي موجب يساوي مربع كل عدد حقيقي موجب .

C : $\forall (a,b) \in]0, +\infty[, \forall c \in \mathbb{R} : ac > bc \Rightarrow a > c$.

التمرين 12 : لتكن x و y و a و b أعداد حقيقية غير منعدمة

$$\text{بين أن : } ax + by = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} \leq a^2 + b^2$$

التمرين 13 : بين أن لكل n من \mathbb{N}^* ؛ لدينا :

$$n \text{ زوجي} \Leftrightarrow n^2 \text{ زوجي}$$

التمرين 14 : نعتبر العبارة التالية :

$$(P) : (\forall y \in \mathbb{R}), (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + xy + y^2 = 0$$

1. حدد نفي العبارة (P) .

2. بين أن العبارة (P) خاطئة .

التمرين 15 : نعتبر العبارة التالية :

$$(P) : (\forall x \in [0,2]), \left(\exists y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \right) : xy - x + 2y - 1 = 0$$

1. حدد نفي العبارة (P) .

2. بين أن العبارة (P) صحيحة .

التمرين 16 : أكتب كلا من العبارات التالية باستعمال الرموز المنطقية وأذكر إذا كانت صحيحة أو خاطئة .

1. لا يوجد أي عدد جذري حل للمعادلة : $x^2 - 9 = 0$.

2. لكل عددين جذريين a و b ؛ يوجد عدد جذري c بحيث :

$$c < b \text{ و } a < c$$

التمرين 17 :

حل في \mathbb{R}^2 » النظمات التالية :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{9}{2} \end{cases} ; \begin{cases} 3x^2 - y - 1 = 0 \\ xy - 2x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2|x| - y^2 = -1 \\ -|x| + 5y = 11 \end{cases} ; \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 = 64 \end{cases}$$

التمرين 18 : لتكن a و b و c أعداد حقيقية . بين الإستلزام التالي :

$$\left[(|a-b| < c) \wedge (|a+b| < c) \right] \Rightarrow \left[|ab| \leq \frac{c^2}{2} \right]$$

التمرين 19 : لتكن a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعاً

$$\text{تحقق : } abc > 1 \text{ و } abc < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

أثبت أن :

1. كل هذه الأعداد لا تساوي العدد 1 .

2. أحد هذه الأعداد أصغر من العدد 1 (باستعمال البرهان بالخلف) .

التمرين 20 : ليكن a و b عددين حقيقيين . بين أن :

$$[\forall x \in \mathbb{R} : ax + by = 0] \Leftrightarrow a = b = 0$$

التمرين 21 : نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

بما يلي :

1. أعط نفي العبارة : $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) : (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$.

2. حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = 0$ ثم بين أن العبارة السابقة خاطئة .

التمرين 22 :

$$1. \text{ بين أن : } \forall x \in [-2,2] : \sqrt{4-x^2} - x \leq 2\sqrt{2}$$

2. بين أن :