

تمرين 1

لتكن p و q و r عبارات
هل العبارات التالية قوانين منطقية؟

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$$

$$\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$$

$$\overline{(p \Leftrightarrow q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow q)$$

$$[p \Rightarrow q \vee \bar{r}] \Leftrightarrow (q \vee (p \Rightarrow r))$$

تمرين 2

أوجد العبارات النافية للعبارات التالية

$$\forall x \in E \quad p(x) \vee \bar{q}(x)$$

$$\exists x \in E \quad p(x) \wedge q(x)$$

$$\exists x \in E \quad p(x) \Rightarrow \bar{q}(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - |x| + 2 \geq 0 \quad \wedge \quad x \in]-2; 2[$$

تمرين 3

ليكن $a \in \mathbb{R}_+$

باستعمال الاستدلال بالتكافؤات المتتالية بين أن
 $a + \frac{1}{a} \geq 2$

تمرين 4

1- بين أن $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \quad a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \wedge \quad b = 0$

2- حل في \mathbb{R}^2 المعادلة $2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} = x + y$

تمرين 5

حل في \mathbb{N}^2 المعادلة $9y^2 - (x+1)^2 = 32$

تمرين 6

لتكن x و y و z أعداد حقيقية

بين أن $x + y > 2z \Rightarrow (x > z \quad \vee \quad y > z)$

تمرين 7

بين أن $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

تمرين 8

لتكن x و y و z أعداد من $[2; +\infty[$ حيث $xy \leq z$

باستعمال الاستدلال بفصل الحالات بين أن $x + y \leq z$

تمرين 9

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$$

تمرين 10

ليكن $a \in \mathbb{R}_+$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+a)^n \geq 1+na$$

تمرين 11

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

تمرين 12

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$-1 \text{ بين أن } 3^{2n} - 2^n \text{ تقبل القسمة على } 7$$

$$-2 \text{ بين أن } n^2(n^2 - 1) \text{ تقبل القسمة على } 12$$

$$-3 \text{ بين أن } 4^n + 6n - 1 \text{ تقبل القسمة على } 9$$

تمرين 13

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = 2^n \times 1 \times 3 \times 5 \dots (2n-1) \text{ و } u_n = (n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = v_n$$

تمرين 14

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نضع

$$u_n = \underbrace{7777 \dots 7}_{72 \text{ رقم مسوي } 7}$$

$$-1 \text{ بين أن } u_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$$

$$-2 \text{ بين أن } \sum_{k=1}^{n+1} u_k = \frac{7}{81}(10^{n+1} - 9n - 10)$$

تمرين 15

نعتبر الدالة f المعرفة من \mathbb{N} نحو \mathbb{R} حيث $f(0) \in]-1; 0[$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n+1) = \frac{f(n)}{\sqrt{2+f(n)}}$$

$$-1 \text{ بين أن } -1 < f(n) < 0$$

$$-2 \text{ بين أن } f(n+1) > f(n)$$

$$-3 \text{ بين أن } f(n+1) \geq \frac{f(n)}{\sqrt{2+f(0)}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(n+1)| \leq \frac{|f(0)|}{(\sqrt{2+f(0)})^{n+1}}$$