مبادئ في المنطق:الأنشطة التمهيدية

نشاط1: ضع العلامة $\times$ في الخانة المناسبة

المنطوقة	صحيح	خاطئ
كل عدد زوجي هو من مضاعفات2		
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي		
$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$		
الإزاحة تقايس في المستوى		
مجموع زوايا مثلث في الهندسة الأقليدية 180°		
x و y عنصران من $\mathbb{R}$ / $x \leq y$		

نشاط2: أتمم بإحدى أداتي الربط التاليتين: "أو" و "و" لكي تصبح العبارات صحيحة معللا جوابك في كل حالة.

1) $x(x-1)=0$ يعني أن: $x-1=0$ .... $x=0$

2) $ABCD$ معين يعني أن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ .... $AB=BC$

3) ABC متساوي الأضلاع يعني أن : $AB=BC$ .... $AB=AC$

4) ليكن x عددا حقيقيا لدينا: $|x|=-x$ .... $|x|=x$

5) ليكن x و y عددان حقيقيان لدينا: $x \leq y$ يعني أن: $x<y$ .... $x=y$

6) ليكن x عددا حقيقيا و $r \in \mathbb{R}_+^*$ لدينا: $|x| \leq r$ يعني أن: $x \leq r$ .... $x \geq -r$

7) ليكن x عددا حقيقيا و $r \in \mathbb{R}_+^*$ لدينا: $|x| \geq r$ يعني أن: $x \geq r$ .... $x \leq -r$

نشاط3:في حوار جرى بين فاطمة وأحمد، أساسه أن كل ما قالته فاطمة ينفيه أحمد،وكل ما قاله أحمد تنفيه فاطمة

أملأ الجدول التالي:

ما قالته فاطمة	ما قاله أحمد	حكمك على قول فاطمة	حكمك على قول أحمد
$\sqrt{2} \in \mathbb{N}$			
	$\sqrt{7}+\sqrt{2}<5$		
114516 من مضاعفات 4			
	$\sqrt{(-2)^2}=-2$		
كل مثلث متساوي الأضلاع			

LOGIQUE

On pourrait distinguer en gros, comme le fait HAOWANG en 1973 trois sens du mot « LOGIQUE ».

Au premier sens la logique est une théorie des propositions qui sont (Logiquement) valides, càd vraies, pour des choses quelconque dans un monde (contexte) quelconque [Logique élémentaire].

Un deuxième sens correspond en gros à ce qu'on appelle habituellement aujourd'hui [Logique mathématique] càd la théorie des modèles, la théorie des fonctions récursives, le traitement axiomatique des nombres entiers, des réels et des ensembles.

Au troisième sens la logique est une étude de mécanismes de la pensée rationnelle en général et elle inclut d'autres disciplines telle la science. (Rationnelle=conforme à la raison).

موضوعات أقليدس
Axiomes d'Euclide

1° Par deux points quelconques passe une unique droite.
2° Toute ligne droite limitée peut être prolongé linéairement en ligne droite.
3° Chaque point peut être centre d'un cercle dont le rayon sera quelconque.
4° Touts les angles droits sont équivalents.
5° Deux droites dans un plan se coupent en un point.
6° Si une droite coupe deux droites tel que les angles internes d'un même côté sont moins que 180° alors si les deux droites se prolongent vont se couper du côté où les angles internes sont moins que 180°.

لا تسأل ماذا يستطيع وطنك أن يقدم إليك بل اسأل نفسك ماذا تستطيع أن تقدم إلى الوطن

LA LOGIQUE المنطق

I- العبارات: Propositions

1- أمثلة:

$\sqrt{2}$ عنصر من المجموعة $\mathbb{Q}$. عبارة خاطئة

x عنصر من $\mathbb{R}$ بحيث لدينا $x \neq 2$. ليست بعبارة

مجموع زوايا مثلث في الهندسة الأقليدية $180°$. عبارة صحيحة

x و y عنصران من $\mathbb{R}$ / $x \leq y$. ليست بعبارة

"كل من عليها فان ويبقى وجه ربك ذو الجلال و الإكرام" عبارة صحيحة

2- تعريف: العبارة هي كل جملة صحيحة لغويا(نص) يمكن التحقق من صحتها أو عدمه.

3- جدول الحقيقة: Tableau de vérité

إذا كانت العبارة صحيحة نرمزلصحتها بالرمز 1 أو V وإذا كانت خاطئة نرمز لعدم صحتهاب 0 أوF

نرمز ب $V = \{\mathrm{F},\mathrm{V}\}$ لمجموعة قيم الحقيقة.

II- عمليات حول العبارات: Opérations sur les propositions

الروابط المنطقية Les connecteurs logiques

لتكن العبارات $p, q, r, s, \ldots\ldots$ سنحاول الحصول على عبارات جديدة انطلاقا من تلك العبارات.

1- نفي عبارة: Négation d'une proposition

a) تعريف: نفي عبارة p هي العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة وخاطئة إذا كانت p صحيحة.

ونرمز لها ب: $\neq p$ ، $\overline{p}$ ، $non(p)$ ، نفـــي(p)

b) جدول الحقيقة:

p	$non(p)$
1	0
0	1

c) أمثلة:

كل مثلث متساوي الأضلاع p tous triangle est équilatéral

ليس كل مثلث متساوي الأضلاع $non(p)$ les triangles ne sont pas tous équilatéraux

$q: 5+7=12$ $non(q): 5+7 \neq 12$

d) **ملحوظة:** ما هي قيمة حقيقة $\mathrm{non}(\mathrm{non}(\mathrm{p}))$ ؟

$\mathrm{non}(\mathrm{non}(\mathrm{p}))$	$non(p)$	p
0	1	0
1	0	1

2- **<u>عطف عبارتين:</u>** <u>Conjonction de deux propositions</u>

a) **تعريف:** عطف عبارتين p و q هي العبارة التي تكون صحيحة إذا وفقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين. **ونرمز:** p و q ، p et q ، $p \wedge q$

b) **جدول الحقيقة:**

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
p et q	1	0	0	0

c) **أمثلة: (3عدد أولي) و (5عدد زوجي)** ، **(4عدد زوجي) و** $(7 < 12)$

1 0 1 1

d) **ملحوظة:** عطف عبارتين أو أكثر لا يكون صحيحا إلا إذا كانت جميع العبارات صحيحة.

e) بين أن عطف عبارتين تبادلي و تجميعي.

أركان الإسلام خمسة:

"شهادة أن لاإلآه إلا الله وأن محمدا رسول الله وإقامة الصلاة
وإيتاء الزكاة وصوم رمضان وحج البيت من استطاع إليه سبيلا".

3- **<u>فصل عبارتين:</u>** <u>Disjonction de deux propositions</u>

a) **تعريف:** فصل عبارتين p و q هي العبارة التي تكون خاطئة إذا وفقط إذا كانت العبارتان p و q خاطئتين. ونرمز: p أو q ، p ou q ، $p \vee q$

b) **جدول الحقيقة:**

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
p ou q	1	1	1	0

c) **أمثلة:** $(5 = 3)$ **أو** $(\sqrt{2} \in \mathbb{Q})$ ، $(5 \neq 3)$ **أو** $(\sqrt{2} \in \mathbb{Q})$

0 0 1 0

d) **تمرين: قانونا مورغان** Les deux lois de Morgan

محاسن الأزمي الثانوية التأهيلية عبد الكريم الحلو الدار البيضاء - أنفا

بين أن: ✍ $non(p \text{ et } q) = non(p) \; ou \; non(q)$ ✍ $non(p \text{ ou } q) = non(p) \text{ et } non(q)$

4- **<u>استلزام عبارتين:</u>** **<u>Implication</u>**

a) **تعريف:** استلزام عبارتين p و q هي العبارة التي لا تكون خاطئة إلا إذا كانت العبارة p صحيحة والعبارة q خاطئة.

ونرمزلإستلزام عبارتين ب: $p \Rightarrow q$

b) **جدول الحقيقة:**

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \Rightarrow q$	1	0	1	1

c) أمثلة: **(2 عدد زوجي)** $\Rightarrow$ $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$ $\qquad$ $(5 \neq 4) \Rightarrow (5 \leq 3)$

1 $\quad$ **1** $\qquad$ **0** $\quad$ **1**

d)تمرين:

أ- أنجز جدول حقيقية العبارة التالية $\left[(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow r)\right] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

ب- بين أنه إذا كان $a \geq b$ **فإن** $a^n \geq b^n$ ، $a \in \mathbb{R}_*^+; b \in \mathbb{R}_*^+; n \in \mathbb{N}^*$

ج- قارن $p \Rightarrow q$ **و** $q \Rightarrow p$**.**

د- بين أن: $(p \Rightarrow q)$ و $(\overline{p} \text{ ou } q)$ لهما نفس قيم الحقيقية.

5- التكافؤ المنطقي: Equivalence logique

a) تعريف: تكافؤ عبارتين p و q هي العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت العبارتان صحيحتين أو خاطئتين.

ونرمز لتكافؤ عبارتين ب: $p \Leftrightarrow q$

b) جدول الحقيقة: $(p \Leftrightarrow q)$ تكافئ(p إذا وفقط إذا كانت q) تكافئ(p شرط لازم وكاف ل q)

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \Leftrightarrow q$	1	0	0	1

c) أمثلة: **(5 عدد زوجي)** $\Leftrightarrow$ **(6 عدد فردي)** $\qquad$ $(2 < 7) \Rightarrow (3 + 5 = 8)$

0 $\quad$ **0** $\qquad$ **1** $\quad$ **1**

d) تمرين: قارن $(p \Leftrightarrow q)$ **و** $\left[(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow p)\right]$

III- القوانين المنطقية Les lois logiques

1- تعريف: كل عبارة مركبة من عبارات أولية وتكون صحيحة في جميع الحالات تسمى قانونا منطقيا.

2- أمثلة:

$(p \text{ et } q) \Leftrightarrow (q \text{ et } p)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (non(p) \text{ ou } q)$
$(p \text{ ou } q) \Leftrightarrow (q \text{ ou } p)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \left[non(q) \Rightarrow non(p)\right]$
$p \Leftrightarrow non(non(p))$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \left[(p \Rightarrow q) et (q \Rightarrow p)\right]$

3- قانونا مورغان: Lois de Morgan

1ére loi : $\left[non\left(p\ et\ q\right)\right] \Leftrightarrow \left[non\left(p\right)\ ou\ non\left(q\right)\right]$

2éme loi : $\left[non\left(p\ ou\ q\right)\right] \Leftrightarrow \left[non\left(p\right)\ et\ non\left(q\right)\right]$

IV- الدالة العبارية Fonction propositionnelle

1- أمثلة: $P\left(x\right):\left[x \in \mathbb{N} / x+15=20\right]$

$x=12$ **عبارة خاطئة** $x=5$ **عبارة صحيحة**

$P\left(x\right)$ **تسمى دالة عبارية**

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathrm{V}_{0,1} \\ 2 & \mapsto & 0 \\ 5 & \mapsto & 1 \end{array}$$

نضع: $\mathrm{A}=\left\{x \in \mathbb{N} / P\left(x\right)\ vraie\right\}$ **إذن** $\mathrm{A}=\left\{5\right\}$

2- تعريف: كل منطوقة معرفة ب $\left\{x \in \mathrm{E} / P\left(x\right)\right\}$ بحيث E مجموعة و $P\left(x\right)$ منطوقة

كلما عوضنا x بعنصر من E نحصل على عبارة تسمى **"دالة عبارية"**.ونضع:

$\mathrm{A}=\left\{x \in \mathrm{E} / P\left(x\right)\right\}$ **مجموعة العناصر** x **من** E التي تحقق المنطوقة $P\left(x\right)$ **.**

3- تمرين: حدد من الدالة العبارية العناصر التي تحقق المنطوقة $P\left(x\right):\left[x \in \mathbb{Z}\ ;\ x^{2} \leq 9\right]$

V- المكممات Les quantificateurs

1- يوجد مكمم كوني quantificateur universel نرمز له ب: $\forall$ **ونقرأ:"مهما يكن"**

2- يوجد مكمم وجودي quantificateur existentiel نرمز له ب: $\exists$ **ونقرأ:"يوجد على الأقل"**

3- أمثلة: حدد قيمة حقيقة العبارات التالية

$p:\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)/\left(x+2\right)^{2}=x^{2}+4x+4$

$q:\left(\exists x \in \mathbb{N}\right)/ x+5=20$

$r:\left(\exists e \in \mathbb{R}\right);\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)/ x \times e=e \times x=x$

$s:\left(\forall x \in \mathbb{R}\right);\left(\exists e \in \mathbb{R}\right)/ x \times e=e \times x=x$

$a:\left(\exists x \in \mathbb{R}\right); x^{2}-2=0$

$b:\left(\exists x \in \mathbb{R}\right); x^{2}+x+1=0$

$c:\left(\exists x \in \mathbb{R}\right);\left(\forall y \in \mathbb{R}\right)/\left(x^{2}+1\right)y=2$

طرق الاستدلال

1) **<u>الاستدلال بالخلف</u>:Le raisonnement par l'absurde**
2) **<u>الاستدلال المضاد للعكس</u>: Le raisonnement par la contraposée**
3) **<u>الاستدلال بالترجع</u>: Le raisonnement par récurrence**

1) **<u>الاستدلال بالخلف</u>:** للبرهنة على خاصية معينة بالخلف نعتبر نفي تلك الخاصية و إذا حصلنا على نتيجة
مستحيلة نحكم على أن تلك الخاصية صحيحة.

تطبيق(أ): بين أن المثلث الذي أضلاعه $6a\,;\,5a\,;\,4a$ غير قائم الزاوية $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$

2) **<u>الاستدلال المضاد للعكس</u>:**

$$\underset{(1)}{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow \underset{(2)}{\left(\overline{q} \Rightarrow \overline{p}\right)}$$

نعتمد العبارة (2) للبرهان على العبارة (1)

تطبيق(ب): ليكن x **و** y عنصران من $\mathbb{R}$ بين
أن $\left[(x \neq y) \Rightarrow (3x - 1 \neq 3y - 1)\right]$

3) **<u>الاستدلال بالترجع</u>:** لكي نبرهن على صحة عبارة $P(n)$ ابتداء من رتبة معينة $n = n_0$
نتبع المرحلتين التاليتين:

-١ نتحقق من أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n = n_0$.

-٢ نفترض أن العبارة $P(n)$ صحيحة من أجل $n > n_0$ و نبين أن العبارة $P(n+1)$ صحيحة.

و بالتالي نستنتج أنه مهما يكن $n \geq n_0$ فإن العبارة $P(n)$ صحيحة.

تطبيق(ج): ✋ برهن أن: $\forall n \geq 1 : 1+2+3+4+5+6+7+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

✋✋ بين باستعمال الترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots\ldots + 4^n = \dfrac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$

a) $P(n_0)$ vraie.

b) On suppose que $P(n)$ vraie (hypothèse de récurrence) et on démontre que $P(n+1)$ vraie. donc $\forall n \geq n_0 \;\; P(n)$ vraie.