المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و ID و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$

I) المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و ID و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$

1- مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية

تذكير

*مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية هي $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4;5...........\}$

الاعداد الصحيحة الطبيعية و مقابلاتها تكون مجموعة الاعداد الصحيحة النسبية يرمز لها بـ $\mathbb{Z}$
نكتب $\mathbb{Z}=\{.....;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1;0;1;2;3;4;.....\}$

-5 عدد صحيح نسبي نكتب $-5\in\mathbb{Z}$
$\sqrt{3}$ ليس عددا صحيحا نسبيا نكتب $\sqrt{3}\notin\mathbb{Z}$
0 العدد الصحيح النسبي المنعدم
* نرمز لمجموعة الاعداد الصحيحة النسبية الغيلر المنعدمة بـ $\mathbb{Z}^*$
$\mathbb{Z}^*=\{.....;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1;1;2;3;4;.....\}$

ملاحظة: كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي
نقول ان المجموعة $\mathbb{N}$ جزء من المجموعة $\mathbb{Z}$ أو المجموعة $\mathbb{N}$ ضمن المجموعة $\mathbb{Z}$
نكتب $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$

2- مجموعة الأعداد العشرية النسبية

اكتب الاعداد التالية على شكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a\in\mathbb{Z}$ و $n\in\mathbb{N}$

3,12 ، 7 ، -3 ، -0,256

تعريف

كل عدد له كتابة كسرية على شكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a\in\mathbb{Z}$ و $n\in\mathbb{N}$ يسمى عددا عشريا نسبيا.
نرمز لمجموعة الاعداد العشرية النسبية بـ ID

نتائج

أ – العدد العشري له كتابة بعدد منته من الأرقام على يمين الفاصلة.

ب- كل عدد صحيح نسبي a هو عدد عشري نسبي (لأنه يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{10^0}$)

إذن $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID$

3- مجموعة الأعداد الجذرية

تعريف

العدد الجدري هو كل عدد يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{b}$ حيث $a\in\mathbb{Z}$ و $b\in\mathbb{Z}$ و $b\neq 0$

يرمز لمجموعة الاعداد الجذرية بـ$\mathbb{Q}$

$\frac{-3}{7}$ عدد جذري ، 6 عدد جذري $-1,36$ عدد جذري π ليس عددا جدريا

$\sqrt{3}$ ليس عددا جدريا

نتيجة

كل عدد عشري نسبي هو عدد جدري

إذن $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID\subset\mathbb{Q}$

4- مجموعة الأعداد الحقيقية

- بين أن $\sqrt{2}$ عدد لا جذري

أرسم مربع ضلعه 1 و حدد طول قطره

- نصف محيط دائرة شعاعها 1 هو عدد لا جذري يرمز له بـ π

توجد مقادير لا يمكن التعبير عنها بأعداد جذرية ، مثل هذه المقادير نعبر عنها باعداد لا جذرية.

الاعداد الجذرية و الاعداد لا جذرية تكون مجموعة تسمى مجموعة الاعداد الحقيقية

يرمز لها بـ$\mathbb{R}$

نتيجة

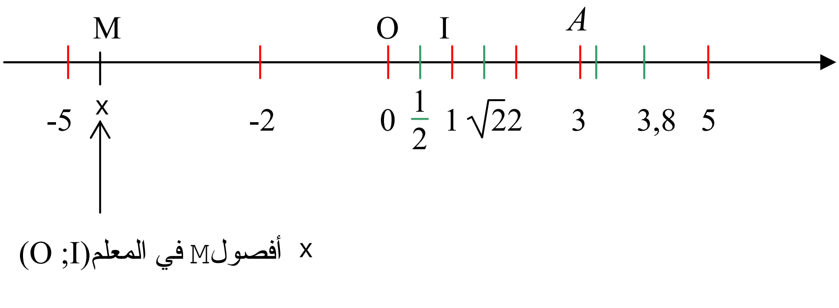
كل عدد جذري هو عدد حقيقي إذن $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

تمثيل المجموعة $\mathbb{R}$

نمثل المجموعة $\mathbb{R}$ على مستقيم مدرج $\Delta(O;I)$

كل نقطة من المستقيم $\Delta(O;I)$ تقبل عددا وحيدا أفصولا لها

كل عدد حقيقي هو افصول لنقطة و حيدة من المستقيم $\Delta(O;I)$



A هي النقطة ذات الافصول 3 نكتب $A(3)$

II) 1) العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ و خاصياتها

أ- الجمع

* الجمع تبادلي في $\mathbb{R}$: لكل a و b من $\mathbb{R}$ $a+b=b+a$
* الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $(a+b)+c=a+(b+c)$
* 0 هو العنصر المحايد للجمع في $\mathbb{R}$: لكل a من $\mathbb{R}$ $0+a=a+0=a$
* لكل عدد حقيقي a مقابل هو $-a$: $-a+a=a+(-a)=0$

ب- الطرح

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ $a-b=a+(-b)$

ج- الضرب

* الضرب تبادلي في $\mathbb{R}$: لكل a و b من $\mathbb{R}$ $a\times b=b\times a$
* الضرب تجميعي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$
* 1 هو العنصر المحايد لضرب في $\mathbb{R}$: لكل a من $\mathbb{R}$ $1\times a=a\times 1=a$
* لكل عدد حقيقي غير منعدم a مقلوب هو $\frac{1}{a}$ (a^{-1}) : $a^{-1}\times a=a\times a^{-1}=1$
* الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$
$(b+c)\cdot a=ba+ca \quad ; \quad a\cdot(b+c)=ab+ac$

د - الخارج

ليكن a من $\mathbb{R}$ و b من $\mathbb{R}^*$ $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$

* * - قواعد

لتكن a و b و c من $\mathbb{R}$: $a=b$ تكافئ $a+c=b+c$

لتكن a و b من $\mathbb{R}$ و c من $\mathbb{R}^*$: $a=b$ تكافئ $ac=bc$

* لكل a و b و c و d من $\mathbb{R}$
* إذا كان $a=b$ و $c=d$ فان $a+c=b+d$
* إذا كان $a=b$ و $c=d$ فان $ac=bd$

$ab=0$ تكافئ $a=0$ أو $b=0$

$ab\neq 0$ تكافئ $a\neq 0$ و $b\neq 0$

* لكل a و b من $\mathbb{R}$ و c و d من $\mathbb{R}^*$ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ تكافئ $ad=bc$

* لكل a و b من $\mathbb{R}$ و c و d من $\mathbb{R}^*$ $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd}$ ، $\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$

* لكل a من $\mathbb{R}$ و b و c و d من $\mathbb{R}^*$ $\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{c}{b}$ ، $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

2) الجذور المربعة

أ- تعريف

ليكن x من $\mathbb{R}^+$

العدد الحقيقي الموجب y الذي يحقق $y^2=x$ يسمى لجذر المربع للعدد الموجب x.

نرمز للجذر مربع للعدد x بـ $\sqrt{x}$

$x\in\mathbb{R}^+ \quad ; \quad y=\sqrt{x}$ تكافئ $y\geq 0 \quad ; \quad x=y^2$

ب- نتائج

ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$: $(\sqrt{x})^2=x \quad ; \quad \sqrt{x^2}=x \quad ; \quad \sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy} \qquad \sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad (y\neq 0)$

$\sqrt{x}=\sqrt{y}$ تكافئ $x=y$

إذا كان x سالبا فان $\sqrt{x^2}=-x$

ملاحظة: لكل عدد حقيقي موجب a يوجد عددان حقيقيان مربعهما يساوي a هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

3) القوى

أ- تعريف

* ليكن a من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{N}^*$

$$a^n = \underbrace{a\times a\times a\times ......\times a}_{n \text{ عاملا}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

العدد a^n يسمى قوة العدد a ذات الأس n

العدد a^{-n} يسمى قوة العدد a ذات الأس $-n$

* ليكن a من $\mathbb{R}^*$ $\quad a^0 = 1$

ب- نتائج

*- لكل x و y من $\mathbb{R}^*$ و لكل n و m من $\mathbb{Z}$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \qquad x^n x^m = x^{n+m}$$

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \qquad \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \qquad \left(x^n\right)^m = x^{n\cdot m}$$

* لكل عدد حقيقي موجب x : $\sqrt{x^n} = \sqrt{x}^n$

حالة خاصة لكل x من $\mathbb{R}$ $\quad x^1 = x$

ج- الكتابة العلمية لعدد عشري

خاصية (مقبولة)

كل عدد عشري b موجب يكتب على شكل $a.10^p$ حيث p عدد صحيح نسبي و a عدد عشري يحقق $1 \leq a \leq 10$

هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية للعدد b

أمثلة

الكتابة العلمية للعدد 1740000 هي $1,74\times10^6$

الكتابة العلمية للعدد $0,000325$ هي $3,25\times10^{-4}$

نتيجة:

كل عدد عشري b سالب يكتب على شكل $-a.10^p$ حيث p عدد صحيح نسبي و a عدد عشري يحقق $1 \leq a \leq 10$

$$-1,74\times10^6 = -1740000 \qquad -0,000325 = -3,25\times10^{-4}$$

4) متطابقات هامة

ليكن a و b من $\mathbb{R}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$