الحساب العددي في $\mathbb{R}$ Calcul dans

ملخص الدرس Résumé du cours

المجموعة $\mathbb{N}=\{0,1,2,3......,n,.......\}$

تسمى بمجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية.

المجموعة $\mathbb{Z}=\{...-n,....-2,-1,0,1,2,....,+n...\}$

تسمى بمجموعة الأعداد الصحيحة النسبية.

المجموعة $ID=\left\{\frac{a}{10^p} \,/\, a\in\mathbb{Z} \text{ و } p\in\mathbb{N}\right\}$

تسمى بمجموعة الأعداد العشرية النسبية.

المجموعة $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \,/\, a\in\mathbb{Z} \text{ و } b\in\mathbb{N}^*\right\}$

تسمى بمجموعة الأعداد الجذرية.

المجموعة $\mathbb{R}$ تسمى بمجموعة الأعداد الحقيقية وتحتوي على الأعداد الجذرية و الأعداد اللا جذرية.

لدينا: $\boxed{\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}}$

1) قواعد الحساب في IR .

ليكن a و b و c و d من IR.

$\boxed{a=b \text{ يكافئ } a+c=b+c}$

$\boxed{a=b \text{ يكافئ } a.c=b.c \text{ مع } (c\neq 0)}$

إذا كان $\begin{cases}a=b\\ c=d\end{cases}$ و فإن $\begin{cases}a+c=b+d\\ a.c=b.d\end{cases}$ و

$\boxed{a.b=0 \text{ يكافئ } a=0 \text{ أو } b=0}$

$\boxed{a.b\neq 0 \text{ يكافئ } a\neq 0 \text{ و } b\neq 0}$

$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ يكافئ } a.d=b.c}$ مع $bd\neq 0$

$\boxed{\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \text{ و } \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}}$ مع $bd\neq 0$

إذا كان: a و b و c و d من IR^* فإن:

$$\boxed{\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a} \text{ و } \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{bc} \text{ و } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}$$

2) القوى في IR

a) تعريف *) $a^0=1$ $(a\neq 0)$ و $a^1=1$

*) $\boxed{a^n=\underbrace{a.a.a....a}_{n\,fois}}$ *) $\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$

$(n\in IN^*-\{1\})$

تمارين و مسائل --------------- Exércices et problèmes

التمرين رقم 1 :

أنجز العمليات و أكتب بأبسط شكل ممكن مايلي:

$$A=\left(\frac{4}{3}-\frac{7}{5}\right)-\left[\left(\frac{3}{5}-\frac{5}{7}\right)-\left(\frac{5}{6}-1\right)\right]+\left[\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}-1\right)\right]$$

$$B=\frac{7}{3}\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)$$

$$D=\left[\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right):\left(\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}\right)\right]\times\left[\left(\frac{2-\frac{1}{9}}{3+\frac{5}{3}}\right):\left(\frac{9-\frac{1}{2}}{5+\frac{9}{3}}\right)\right] \qquad C=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}-\frac{5}{6}}$$

Réponse

التمرين رقم 2 :

ليكن a و b و c أعداد حقيقية.

أزل الأقواس والمعقوفات ثم إختصر العبارات التالية:

$$A=\left[(a-c)-(a-b)\right]-\left[(c-a)+(b-c)\right]-\left[a-(b-c)\right]$$

$$B=\left[a-(b-c-1)\right]-\left[(-a-b)-(a-1+c)\right]-(b-c)$$

$$C=-\left(\sqrt{3}-b\right)-\left[-\left(-a+\sqrt{3}\right)-(a-b)+\sqrt{3}\right]$$

Réponse

التمرين رقم 3 :

ليكن a و b عددين حقيقيين.أنشر ثم بسط التعابير التالية:

$$A=\left(a^3-b\right)\times\left(b-a^2\right)-(a+b)\times\left(-a^2+3\right)$$

$$B=\left(3a^2+2b^2\right)\times a^2-\left(a^2-1\right)\times\left(4a^2-3b^2\right)$$

$$C=\left(a^4-b\right)\times(b-3)+\left(b+a^4\right)\times(b+3)$$

Réponse

التمرين رقم 4 :

a و b و x أعداد حقيقية.عمل مايلي:

$$A=2(x+3)\times(x+4)-\left(x^2-16\right)$$

$$B=(2x-1)^2-(3-2x)^2$$

$$C=x^3+8+2\left(x^2-4\right)-(x+2)^2$$

$$D=a^2+b^2-x^2+2ab$$

$$E=ab\times\left(x^2+y^2\right)+xy\times\left(a^2+b^2\right)$$

$$F=\left(\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{x}{3}-\frac{1}{2}$$

$$G=4x^2-4x\sqrt{5}+5+(1-2x)\times\left(2x-\sqrt{5}\right)$$

Réponse

التمرين رقم 5:

a و b و c أعداد حقيقية.

1) بين أنه إذا كان $a\geq 0$ و $b\geq 0$ و $c\geq 0$ و $a\times b\times c=1$ فإن:

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1$$

2) بين أنه إذا كان a و b و c غير منعدمة ومختلفة مثنى مثنى،

و تحقق $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$

فإن: $(a\times b\times c)^2=1$

Réponse

Résumé du cours ملخص الدرس

b) قوى العدد10: لكل n من $\mathbb{N}$.

$10^{n}=1\underbrace{00....0}_{n\ \text{zero}}$ و $10^{-n}=0,\underbrace{0....0}_{n\ \text{zero}}1$

c) الكتابة العلمية:

هي كل عدد عشري موجب x يكتب على شكل جداء عدد عشري a و 10^{p}

حيث: $p\in\mathbb{Z}$ و $1\le a<10$

$\boxed{x=a\times10^{p}}$ تسمى بالكتابة العلمية.

d) رتبة مقدار عدد عشري.

عندما نكتب عددا عشريا موجبا بالكتابة العلمية على نحو $m=\underbrace{3,6}_{a}\times10^{-7}$

أو $n=\underbrace{2,3}_{a}\times10^{-7}$

ونأخذ العدد الصحيح الأقرب للعدد العشري فإننا نحصل على رتبة مقدار هذا العدد.

مثلا: رتبة مقدار m هي 4×10^{-7} .

رتبة مقدار n هي 2×10^{-7} .

b) خاصيـــات القوى:

ليكن a و b من IR^{*} و m و n من $\mathbb{Z}$.

*) $\boxed{a^{m}.a^{n}=a^{m+n}}$ *) $\boxed{(a^{m})^{n}=a^{mn}}$

*) $\boxed{(ab)^{n}=a^{n}.b^{n}}$

*) $\boxed{\frac{a^{n}}{a^{m}}=a^{n-m}}$ *) $\boxed{(\frac{a}{b})^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}}$

إذا كان $a=b$ فإن $a^{2}=b^{2}$

إذا كان $a^{2}=b^{2}$ و a و b لهما نفس الإشارة فإن $a=b$

$a^{2}=b^{2}$ يكافئ $a=b$ أو $a=-b$

لكي نبين أن $a=b$ يكفي أن نبين أن $a^{2}=b^{2}$ و a و b لهما نفس الإشارة

3) متطابقـــات هامة :

$\boxed{(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}}$

$\boxed{(a-b)^{2}=a^{2}-2ab+b^{2}}$

$\boxed{a^{2}-b^{2}=(a-b)(a+b)}$

$\boxed{(a+b)^{3}=a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}}$

$\boxed{(a-b)^{3}=a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}}$

$\boxed{a^{3}-b^{3}=(a-b)(a^{2}+ab+b^{2})}$

$\boxed{a^{3}+b^{3}=(a+b)(a^{2}-ab+b^{2})}$

Exércices et problèmes----------------تمارين و مسائل

التمرين رقم 6 :

أكتب على شكل قوى العدد 10 مايلي :

$$X=\frac{6^{2}\times0,5\times3^{-3}\times10^{-9}}{20\times30^{-1}\times(0,01)^{-3}} \quad \text{و} \quad Y=\frac{0,8\times10^{15}\times1,5\times10^{-6}}{10^{3}\times12}$$

Réponse

التمرين رقم7 :

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة نعتبر العدد الحقيقي:

$$M=\frac{\left(x^{2}\times y^{-3}\times z\right)^{-4}\times\left(x^{3}\times z^{-2}\right)^{2}}{\left(x^{-2}\times y^{3}\times z^{-2}\right)^{3}}$$

1) بسط كتابة العدد M .

2) أحسب قيمة M إذا علمت أن:

$$x=-\frac{2}{3}.10^{2} \ \text{و}\ y=-\frac{9}{2}.10^{-3} \ \text{و}\ z=2$$

Réponse

التمرين رقم 8 :

نعتبر الأعداد التالية:

$a=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $b=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ و $c=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $d=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

1) أحسب $a\times b$ ثم $c\times d$.

2) أحسب الجداء $a\times b\times c\times d$.

Réponse

التمرين رقم 9 :

أثبت المتساويات التالية:

1) $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}+2=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ 2) $\frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3}+\frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}-3}=14$

3) $\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{14}$ 4) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}=1$

5) $\left(1+\sqrt{\frac{31}{3}}\right)^{3}+\left(1-\sqrt{\frac{31}{3}}\right)^{3}=4^{3}$ 6) $\sqrt{\frac{4}{\left(1-\sqrt{3}\right)^{2}}}-\sqrt{\frac{1}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2}}}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$

Réponse

التمرين رقم 10 :

ليكن α عددا حقيقيا و a و b العددين المعرفين ب:

$$a=\sqrt{\alpha^{2}+1}+\alpha \quad \text{و} \quad b=\sqrt{\alpha^{2}+1}-\alpha$$

1)- a أحسب بدلالة α الأعداد: $a\times b$ و $a+b$ و $a-b$.

b- إستنتج أن a و b موجبان.

2) أحسب قيم α ثم قيم a و b علما أن: $\left(a^{2}-b^{2}\right)^{2}=32\left(1+\alpha^{2}\right)$

Réponse

التمرين رقم 11 :

نعتبر العددين الحقيقيين:

$$a=\sqrt{19+6\sqrt{10}} \quad \text{و} \quad b=\sqrt{19-6\sqrt{10}}$$

1) بين أن $a\times b=1$.

2) نضع $u=a+b$ و $v=a-b$.

- a أحسب العددين u^{2} و v^{2} ثم إستنتج قيم u و v .
- b أوجد كتابة مبسطة لكل من العددين: a و b .

Réponse

التمرين رقم 12 :

لتكن a و b و c أعداد حقيقية موجبة بحيث: $c^{2}=a^{2}-b$.

بين أن: $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$ و $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$

Réponse

Résumé du cours ملخص الدرس

4) الجذور المربعة :

تعريف ليكن $a \in IR^+$. الجذر المربع للعدد a هو العدد الموجب b الذي يحقق : $\boxed{b^2=a}$. ونكتب $\boxed{\sqrt{a}=b}$.

خاصيات.

-- ليكن a و b من IR^+ .

(* $\boxed{\sqrt{a}\ge 0}$ (* $\boxed{\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a}$

(* $\boxed{\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}}$ (* $\boxed{(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}}$

(* $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$ (* $\boxed{\sqrt{x^2}=|x|}$ $x \in IR$

--إذا كان $ab>0$ فإن :

$\boxed{\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}$ و $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}}$

--لكل a من $\mathbb{R}^+$

$\boxed{x^2=a \text{ يكافئ } x=\sqrt{a} \text{ أو } x=-\sqrt{a}}$

5) التنـــــــاسبية .

لتكن a و b و c و d من $\mathbb{R}^*$

a) نقول إن العددين a و b متناسبان مع c و d إذا وفقط إذا كان $\boxed{\frac{a}{c}=\frac{b}{d}}$

b) نقول إن a و b و c و d تكون تناسبا في هذا الترتيب إذا كان: $\boxed{\frac{a}{c}=\frac{b}{d}}$

c) إذا كانت a_1 و a_2 و a_3 و... و a_n من $\mathbb{R}^*$ متناسبة مع b_1 و b_2 و b_3 و... و b_n من $\mathbb{R}^*$ على التوالي فإن:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}}$$

و لكل k_1 و k_2 و k_3 و... و k_n من $\mathbb{R}$

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}}$$

مع: $k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n \neq 0$

6) النشر و التعميل:

--نشر جداء هو كتابته على شكل مجموع:

$\boxed{k(a+b-c)=ka+kb-kc}$

--تعميل مجموع هو كتابته على شكل جداء عاملين أوعدة عوامل:

$\boxed{ka+kb-kc=k(a+b-c)}$

Exércices et problèmes---------------تمارين و مسائل

التمرين رقم 13 :

لتكن a و b و c و x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا، بحيث: x و y و z متناسبة مع a و b و c على التوالي.

بين أن: $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=\sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}$

Réponse

التمرين رقم 14:

إقتسم ثلاثة أشخاص مبلغ 3000 درهم بتناسب مع الأعداد : n-1 و n و n+1 حيث $n \in \mathbb{N}$ و $n \ge 2$

1) عبر بدلالة n عن نصيب كل شخص.

2) كيف يمكن إختيار العدد n ليكون نصيب كل واحد عددا صحيحا طبيعيا

Réponse

التمرين رقم15 :

ليكن n عدد صحيح طبيعي.

1) تحقق أن $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

2) أحسب التعبير : $A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+.............+\frac{1}{\sqrt{99}+10}$

Réponse

التمرين رقم16 :

1) حدد a و b من $\mathbb{R}$ بحيث يكون: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

2) إستنتج حساب: $S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+.................+\frac{1}{2006\times 2007}$

Réponse

التمرين رقم17 :

نعتبر النشر الدوري لعدد x: $x=0,54\overset{\frown}{54}\overset{\frown}{54}......$

1) أحسب $100\times x$ وتحقق أن : $100\times x=54+x$

2) إستنتج كتابة x على شكل كسر.

3) أكتب على شكل كسر العدد y حيث $y=2,17\overset{\frown}{17}\overset{\frown}{17}.....$

4) أي عدد يمثله النشر العشري الدوري: $0.9\overset{\frown}{9}\overset{\frown}{9}\overset{\frown}{9}.....$

Réponse

التمرين رقم18 :

يعطي التراب المنجمي 60% من وزنه فوسفاطا خالصا و يعطي الفوسفاط 192% من وزنه سمادا فلاحيا.

ماهي كمية التراب المنجمي اللا زمة للحصول على 9000 كيلوغرام من السماد الفلاحي؟

Réponse

التمرين رقم19 :

نحسب قوة الجاذبية بين جسمين بالعلاقة: $F=G\times\frac{m_1\times m_2}{d^2}$ معبرا عنها بالنيوتن.حيث: m_1 و m_2 هما كتلتا الجسمين (ب Kg)

d المسافة بين الجسمين (ب m)

G ثابتة التجاذب الكوني $G=6,67\times 10^{-11}$

أحسب قوة التجاذب في الحالتين التاليتين:

1) بين الأرض والقمر علما أن:

كتلة الأرض هي $5,98\times 10^{24}$ Kg و كتلة القمر هي $7,35\times 10^{22}$ Kg

و المسافة بينهما هي 4×10^{8} m

2) بين زحل والشمس علما أن:

كتلة زحل هي جداء كتلة الأرض في $95,147$ و كتلة الشمس هي 2×10^{30} Kg و المسافة بينهما هي 1427 مليون كيلومتر.