الاتصال

الاتصال في نقطة:

تعريف

f متصلة في x_0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$

الاتصال على اليمين – الاتصال على اليسار:

f متصلة على يمين x_0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x)=f(x_0)$ f متصلة على يسار x_0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x)=f(x_0)$
f متصلة على يمين و على يسار x_0 $\Leftrightarrow$ f متصلة في x_0

الاتصال على مجال:

تكون f متصلة على مجال مفتوح $]a,b[$ إذا كانت f متصلة في كل نقطة من المجال $]a,b[$
تكون f متصلة على مجال مغلق $[a,b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح $]a,b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b

العمليات على الدوال المتصلة:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي • الدوال $f+g$, $f \times g$, kf متصلة على المجال I • إذا كانت g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتين على المجال I

نتائج:

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

اتصال مركب دالتين:

إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$ فإن: $g \circ f$ متصلة على المجال I

صورة مجال بدالة متصلة:

• صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة • صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

حالات خاصة: لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I
الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

المجال I	المجال $f(I)$	
	f تزايدية قطعا على I	f تناقصية قطعا على I
$[a,b]$	$\left[f(a);f(b)\right]$	$\left[f(b);f(a)\right]$
$[a,b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

⮨ مبرهنة القيم الوسيطة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$
يوجد على الأقل عد حقيقي α من المجال $[a,b]$ بحيث: $f(\alpha)=\beta$

نتيجة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$

⮨ طريقة التفرع الثنائي:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ بحيث: $f(a)\times f(b)<0$
وليكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$

إذا كان: $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$	إذا كان: $f(b)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$
فإن: $a<\alpha<\frac{a+b}{2}$ و هذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α	فإن: $\frac{a+b}{2}<\alpha<b$ و هذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α

ملاحظة: وهكذا دواليك يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأطير للعدد α سعته مرغوب فيها