

ب- حل المعادلة:  $(E_1)$

ج- أكتب حل المعادلة  $(E_1)$  على الشكل المثلثي وعلى الشكل  $\lambda i$  و  $\lambda ij$  حيث:  $(\lambda \in \mathbb{R})$ .

2. أ- أنشر  $P(z)$ .

ب- استنتج حلول المعادلة:

$$(E): (z \in \mathbb{C} : z^3 + 8i = 0)$$

3. لتكن  $a$  و  $b$  و  $c$  هي حلول المعادلة  $(E)$  بحيث:

$$\operatorname{Re}(a) = 0 \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}(b) < 0 \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}(c) > 0$$

$$a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{أ- تحقق من أن:}$$

ب- في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي أحاطها على التوالي

هي  $a$  و  $b$  و  $c$ . بين أن  $ABC$  مثلث متساوي الأضلاع.

**:3**

1. بين أن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^{2ix} - 1 = 2i \sin(x) e^{ix}$$

2. حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية:  $(Z+1)^n = e^{2ina}$ ، حيث:

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \text{و} \quad a \in \mathbb{R}$$

3. نضع:  $\forall n \in \mathbb{N}^* : P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

$$P_n = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}} \quad \text{أثبت أن:}$$

**:4**

ليكن  $\theta$  عددا حقيقيا. لكل  $z$  من  $\mathbb{C}$ . نضع:

$$P(z) = z^3 + (1+3ie^{i\theta})z^2 + (1+i(1+3e^{i\theta}))z + (3i-3)e^{i\theta}$$

1. بين أن  $z_1 = -3ie^{i\theta}$  حل للمعادلة:

$$(E): z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$$

2. أ- حدد العددين العقديين  $a$  و  $b$  بحيث:

$$\forall z \in \mathbb{C}: P(z) = (z + 3ie^{i\theta})(z^2 + az + b)$$

ب- ليكن  $z_2$  و  $z_3$  الحلين الآخرين للمعادلة  $(E)$ .

حدد  $z_2$  و  $z_3$  ( $z_2$  هو الحل التخيلي الصرف)

3. أ- أكتب  $z_1$  و  $z_2$  و  $z_3$  على الشكل المثلثي.

ب- نضع:  $\theta = \frac{\pi}{10}$ . حدد الشكل الجبري للعدد العقدي  $\alpha$

**:1**

ليكن  $f$  التطبيق من  $\mathbb{C} - \{i\}$  نحو  $\mathbb{C} - \{i\}$  المعروف بما يلي:

$$f(z) = \frac{iz}{z-i}$$

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ،

نعتبر النقطة  $B$  ذات اللق  $i$  ونربط كل نقطة  $M$  بلحقتها  $z$ .

1. حدد المجموعتين التاليتين:

$$E_1 = \{ M(z) / f(z) \in \mathbb{R} \}$$

$$E_2 = \{ M(z) / f(z) \in i\mathbb{R} \}$$

2. حل في  $\mathbb{C} - \{i\}$  المعادلة  $f(z) = -2z + 1$ .

3. ليكن  $z \in \mathbb{C} - \{i\}$ . نعتبر  $r$  معيار  $z - i$  و  $\alpha$  قياسا لعمدة  $z - i$ .

أ- أكتب  $f(z) - i$  على الشكل المثلثي.

ب- حدد  $(\mathcal{E})$ ، مجموعة النقط  $M(z)$  التي من أجلها يكون:

$$|f(z) - i| = \sqrt{2}$$

ج- حدد  $(\mathcal{D})$ ، مجموعة النقط  $M(z)$  التي من أجلها يكون:

$$\frac{\pi}{4} \text{ قياسا لعمدة } f(z) - i$$

د- حدد  $z_0$  بحيث  $f(z_0) = 1 + 2i$ . لتكن  $A$  النقطة ذات

اللق  $z_0$ . تحقق من أن  $A$  تنتمي إلى  $(\mathcal{E})$  و  $(\mathcal{D})$ .

أنشئ  $(\mathcal{E})$  و  $(\mathcal{D})$ .

**:2**

$\boxed{A}$  نضع:  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$   $j$  est l'entier de JACOBI

(  $j$  هو جذر من الرتبة الثالثة للوحدة:  $j^3 = 1$  )

1. تحقق من أن:  $j^2 = \bar{j}$  و أن  $1 + j + j^2 = 0$ .

2. أكتب على الشكل المثلثي العددين العقديين  $2i$  و  $2ij$ .

$\boxed{B}$  نعتبر  $P$  و  $Q$  التطبيقين من  $\mathbb{C}$  نحو  $\mathbb{C}$  المعروفين كما يلي:

$$P(z) = (z - 2i\bar{j})Q(z)$$

$$Q(z) = z^2 + 2ij^2z - 4j$$

1. أ- نعتبر المعادلة:

$$(E_1): (z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0)$$

تحقق من أن المميز المختصر  $\Delta'$  يساوي  $(\sqrt{3}j^2)^2$

$$\alpha = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5$$

**: 5**

المستوى العقدي  $\mathcal{D}$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  
 $f(z) = z^2 - 2jz - 1$ ، نضع  $z$  من  $\mathbb{C}$ ، لكل  $(o, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$

$$. j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1. حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $f(z) = 0$   
 2. حدد وأنشئ المجموعة :

$$(H) = \{ M(z) \in P / f(z) \in \mathbb{R} \}$$

3. ليكن التطبيق :

$$F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$M(z) \mapsto M'(f(z))$$

ولتكن  $(\mathcal{E})$  الدائرة التي مركزها  $A(j)$  وشعاعها  $r$  و  $(\mathcal{D})$  المستقيم الذي يمر من  $A$  ومعامله الموجه  $\tan(\theta)$  حيث :

$$. -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

أ- تحقق من أن :  $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) - j = (z - j)^2$

ب- حدد طبيعة صورة كل من المجموعتين  $(\mathcal{E})$  و  $(\mathcal{D})$  بالتطبيق  $F$ .

**: 6**

في المستوى الأقليدي  $\mathcal{D}$  المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  
 $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ ، نعتبر النقطتين  $A(i)$  و  $A'(-i)$ ، وليكن  $f$

التطبيق من  $\mathbb{C} - \{i\}$  نحو  $\mathbb{C}$  والمعرف بما يلي :

$$f(z) = \frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$$

ولیکن  $F$  التطبيق من  $\mathcal{D} - \{A\}$  نحو  $\mathcal{D}$  الذي يربط كل نقطة

$M(z)$  بالنقطة  $M'(z')$  حيث :  $z' = f(z)$

1. أ- أثبت أنه إذا كان  $z \neq 0$  و  $z' \neq 0$  فإن :

$$|z| = |z'|$$

$$\arg(z') \equiv -\arg(z) + 2\arg(z-i) \quad [2\pi]$$

( لاحظ أن  $z-i$  و  $\bar{z}+i$  مترافقان )

ب- بين أنه إذا كان  $|z|=1$  فإن  $f(z) = -i$

2. أ- حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق  $F$ .

ب- ماهي مجموعة النقط  $M(z)$  بحيث تكون  $f(z)$  على

شكل  $ai$  مع  $a$  عنصر من  $\mathbb{R}$  ؟

$$3. أ- أثبت أن :  $z' + i = \frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$$$

$$\text{وأن : } z' - z = \frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$$

ب- استنتج أن المتجهين  $\overrightarrow{AM}$  و  $\overrightarrow{A'M'}$  مستقيمان .  
 وأن  $\overrightarrow{AM}$  و  $\overrightarrow{MM'}$  متعامدان .

ج- أعط طريقة للإنشاء الهندسي لصورة  $M$  بالتطبيق  $F$ .

$$\text{نضع : } j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

في المستوى العقدي  $\mathcal{D}$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  
 $(O, \bar{u}, \bar{v})$ ، نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي أحاقها على التوالي

هي  $a=8$  و  $b=6j$  و  $c=8j^2$

لتكن  $A'$  صورة  $B$  بالدوران  $R\left(C, \frac{\pi}{3}\right)$

$B'$  صورة  $C$  بالدوران  $R\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$

$C'$  صورة  $A$  بالدوران  $R\left(B, \frac{\pi}{3}\right)$

1. أنشئ النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $A'$  و  $B'$  و  $C'$ .

2. نضع  $a'$  و  $b'$  و  $c'$  على التوالي أحاق النقط  $A'$  و  $B'$  و  $C'$   
 أ- أحسب  $a'$  . ( تحقق من أن  $a' \in \mathbb{R}$  )

ب- بين أن :  $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، واستنتج أن  $O \in (BB')$

ج- بين أن :  $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$

د- بين أن المستقيمات  $(AA')$  و  $(BB')$  و  $(CC')$  تتلاقى في

النقطة  $O$ .

3. فيما يلي نود أن نبين أن المسافة  $MA + MB + MC$  تكون دنوية إذا كان  $M = O$ .

أ- أحسب  $OA + OB + OC$ .

ب- بين أن :  $j^3 = 1$  و  $1 + j + j^2 = 0$

ج- لتكن  $M$  النقطة التي لحقها  $j$ . تحقق مما سبق أن :

$$|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| =$$

$$|a+bj+cj^2| = 22$$

د- نقبل أن لكل الأعداد العقدية  $z$  و  $z'$  و  $z''$ ، لدينا :

$$|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|$$

بين أن المسافة  $MA + MB + MC$  تكون دنوية إذا كان

$$M = O$$

( النقطة  $M = O$  تسمى نقطة Torricelli )