التمريـــــن 1 :

نضع : $z_1=1+i$ و $z_2=\sqrt{3}+i$ و $z_3=\dfrac{z_1}{z_2}$.

1. أكتب z_1 و z_2 و z_3 على الشكل المثلثي.
2. استنتج : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
3. نضع : $z_4=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

حدد : $\left(\dfrac{z_4}{4}\right)^{2009}$.

التمريـــــن 2 :

لتكن المجموعة : $\mathbb{U}=\left\{z\in\mathbb{C}\ /\ |z|=1\right\}$.

1. بين أن : $\forall z\in\mathbb{U}\ :\ -1\le\Re e(z)\le1$

وأن : $\forall z\in\mathbb{U}\ :\ -1\le\Im m(z)\le1$

2. ليكن $(a,b)\in\mathbb{U}^2$.

أ- بين أن : $\dfrac{(a+b)^2}{ab}=a\bar{b}+\bar{a}b+2$.

ب- استنتج أن : $\dfrac{(a+b)^2}{ab}\in\mathbb{R}$.

3. ليكن z_1 و z_2 عددين عقدين غير منعدمين.

في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$، نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي هما z_1 و z_2 ، وليكن t لحق النقطة G مرجح النظمة المتزنة

$$\left\{\left(M_1,\frac{1}{|z_1|}\right),\left(M_2,\frac{1}{|z_2|}\right)\right\}.$$

نضع : $a=\dfrac{z_1}{|z_1|}$ و $b=\dfrac{z_2}{|z_2|}$.

أ- بين أن : $\dfrac{t^2}{z_1z_2}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}\times\dfrac{|z_1||z_2|}{\left(|z_1|+|z_2|\right)^2}$.

ب- نفترض أن : $a+b\neq0$. بين أن المستقيم (OG) هو حامل منصف الزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OM_1}\ ,\ \overrightarrow{OM_2}\right)$.

4. تطبيق : نعتبر النقطتين $A(2+i)$ و $B(-2+11i)$. حدد معادلة ديكارتية لحامل منصف الزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB_2}\right)$.

التمريـــــن 3 :

لتكن $(S_n)_{n\ge2}$ المتتالية العددية حيث :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

1. بين بالترجع : صيغة موافر *Formule de Moivre*

$$\forall\theta\in\mathbb{R}\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\ :$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

2. نضع : $\forall n\ge2\ :\ z=\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

أحسب المجموع : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}z^k$ ، لكل $n\ge2$.

3. بين أن: $\forall n\ge2\ :\ \dfrac{2}{1-z}=1+i\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$

4. استنتج أن : $\forall n\ge2\ :\ S_n=\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$

5. أحسب $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$.

التمريـــــن 4 :

في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c ؛ ونعتبر $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ متجهتين غير منعدمتين بحيث

$$Aff\left(\vec{u_1}\right)=z_1\quad\text{و}\quad Aff\left(\vec{u_2}\right)=z_2$$

1. بين أن : $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ مستقيميتان $\Leftrightarrow z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2=0$
2. بين أن : $\vec{u_1}\perp\vec{u_2}\Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$.
3. بين أن : $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)$
4. ليكن $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و Ω نقطة لحقها ω .

أ- ليكن R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

بين أنه إذا كانت النقطة M' ، ذات اللحق z' ، هي صورة النقطة M ، التي لحقها z ، بالدوران R ، فإن : $z'=-j^2z-j\omega$.

ب- استنتج أن : ABC مثلث متساوي الأضلاع

$$\Leftrightarrow\ a+bj+cj^2=0 \quad \text{أو} \quad a+bj^2+cj=0$$

$$\Leftrightarrow\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$\Leftrightarrow\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

جـ- حدد الأعداد العقدية z التي من أجلها يكون المثلث ABC متساوي الأضلاع ، حيث : $a=i$ و $b=z$ و $c=iz$.

5. بين أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$ النقط A و B و C مستقيمية

التمرين 5 :

لكل عدد عقدي z مخالف للعدد -1 ؛ نضع :

$$f(z)=\frac{iz-1}{(z+1)^2}$$

1. أ- حدد العدد الحقيقي y بحيث : $f(iy)=iy$.

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\ f(z)=z$.

نرمز ب z_0 و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث :

$\Re e(z_0)=0$ و $\Re e(z_1)>\Re e(z_2)$.

2. أ- تحقق أن : $z_1+1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

ب- استنتج الكتابة المثلثية لكل من العددين z_1 و z_2 .

3. في هذا السؤال نفترض أن $z=e^{i\alpha}$ حيث $0\le\alpha<\pi$.

أ- بين أن : $\overline{f(z)}=izf(z)$.

ب- حدد α إذا علمت أن : $f(z)+\overline{f(z)}=0$.

جـ- أكتب $f(z)$ على الشكل $f(z)=re^{i\varphi}$ ، حيث : $(r,\varphi)\in\left]0,+\infty\right[\times\mathbb{R}$.

4. حدد z ، إذا علمت أن : $\begin{cases} |z|=1 \\ \Re e(f(z))=\frac{1}{2} \end{cases}$.

التمرين 6 :

ليكن f التطبيق المعرف من $\mathbb{C}-\{i\}$ نحو $\mathbb{C}-\{i\}$ بما يلي :

$$f(z)=\frac{iz}{z-i}$$

في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطة B ذات اللحق i ، ونربط كل نقطة M بلحقها z .

1. حدد المجموعتين :

$$(E_1)=\{M(z)\in\mathcal{P}\ /\ f(z)\in\mathbb{R}\}$$

$$(E_2)=\{M(z)\in\mathcal{P}\ /\ f(z)\in i\mathbb{R}\}$$

2. حل في $\mathbb{C}-\{i\}$ المعادلة : $f(z)=-2z+1$.

3. ليكن $z\in\mathbb{C}-\{i\}$. نعتبر r معيار $z-i$ و α قياسا لعمدة $z-i$.

أ- أكتب $f(z)-i$ على الشكل المثلثي .

ب- حدد $(\mathscr{C})$ مجموعة النقط $M(z)$ بحيث : $|f(z)-i|=\sqrt{2}$

جـ- حدد $(\mathscr{D})$ مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $\frac{\pi}{4}$ قياسا لعمدة $f(z)-i$.

د- حدد z_0 بحيث $f(z_0)=1+2i$.

لتكن A النقطة ذات اللحق z_0 .

تحقق من أن A تنتمي إلى $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{D})$ ، وأرسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{D})$.

التمرين 7 :

في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر التطبيق f من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بحيث :

$$f(z)=\frac{1}{6}\left[\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2\overline{z}\right]$$

I. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z)=0$.

II. لتكن $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العقدية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} z_0=1 \\ z_{n+1}=f(z_n)\ ;\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

و $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ u_n=|z_n|$

1. أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ 0\le u_{n+1}\le\frac{2}{3}u_n$.

ب- استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وأحسب نهايتها.

2. لكل k من $\mathbb{N}$ ، نعتبر M_k صورة العدد العقدي z_k.

نضع : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ S_n=\sum_{k=0}^{n}OM_k$.

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ S_n\le 3$.

ب- بين أن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.

III. ليكن $z=re^{i\theta}$ ، حيث : $r>0$ و $\theta\in\left]-\pi,\pi\right]$.

1. بين أن : $f(z)=\frac{2}{3}r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2. بين أن النقط M_1 و M_2 و ... و M_n مستقيمية .