التمرين 1 :

الجزء الأول : لتكن φ الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathscr{D}=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ بما يلي :

$$\forall x\in\mathscr{D} : \varphi(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$$

1. أدرس تغيرات الدالة φ ، ثم استنتج أن :

$$\forall x\in\mathscr{D} : \varphi(x)>0$$

2. باستعمال ، مبرهنة التزايدات المنتهية، على الدالة $\ln$ على المجال $[x,x+1]$ ، بين من جديد أن :

$$\forall x\in\mathscr{D} : \varphi(x)>0$$

الجزء الثاني : لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathscr{D}\cup\{0\}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1. أدرس اتصال وقابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 .
2. أحسب نهايات f عند محدات المجموعة $\mathscr{D}\cup\{0\}$.
3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathscr{D}$ ، ثم أعط جدول تغيرات f .
4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.
5. لتكن g الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$g(x)=f(-1-x)$$

أ- حدد $\mathscr{D}_g$ حيز تعريف الدالة g .

ب- بين أن المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متماثلان بالنسبة للمستقيم $(\Delta) : x=-\frac{1}{2}$ ، معللا جوابك.

جـ- أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ في المعلم السابق.

د- بين مبيانيا أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* : f(n)<1<g(n)$.

هـ- استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

6. أ- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب- حل في $\mathbb{R}^+$ المعادلة $f(x)=f^{-1}(x)$.

التمرين 2 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\ln\left[\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\right] .$$

1. حدد $\mathscr{D}$ حيز تعريف الدالة f ، وأدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في النقطة 1 . (يمكن وضع $t=\sqrt{x-1}$) . أعط تأويلا مبيانيا للنتيجة .
3. أدرس تغيرات الدالة f .
4. ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة f بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ-أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

ب- أدرس تقعر $(\mathscr{C}_f)$. (يتم تحديد إحداثيتي نقطة انعطاف $(\mathscr{C}_f)$).

جـ- أعط معادلة للمماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في نقطته ذات الأفصول 5.

د- أرسم $(\mathscr{C}_f)$ و (T) . (نأخذ : 1cm كوحدة قياس).

التمرين 3 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x)=-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$$

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى P المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I- 1. حدد $\mathscr{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .

2. بين أن الدالة f فردية .

3. أحسب النهايات التالية :

$$(i : \lim_{x\to 1} f(x) \quad ; \quad (ii : \lim_{x\to+\infty} f(x)+x$$

أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما .

II- 1. أدرس تغيرات f ، وأعط جدول التغيرات .

2. أ- بين أن : $\forall x>0:\ \ln(1+x)-x<0$.

ب- بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة Ω أفصولها x_0 بحيث: $1,1<x_0<\sqrt{2}$.(نذكر أن $e<3$)

3. أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

III- نضع لكل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ و $v_n=\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* : v_n=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$ ؛

حيث : $x_n=\dfrac{1}{2n+1}$.

ب- استنتج رتابة المتتالية العدية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

جـ- بين أن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة .

التمرين 4 :

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=1-x\ln x \quad ; \quad x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$$

1. أ- تحقق أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 .

ب- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

جـ- أدرس تغيرات الدالة g وضع جدول تغيراتها .

2. أ- بين أن : $\exists!\alpha\in\left]e^{-1},+\infty\right[\quad : \quad g(\alpha)=0$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على حيز تعريفها .

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\left[e^{-1},+\infty\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{\ln(1+\ln x)}{x}} \quad ; \quad x>e^{-1} \\ f\left(e^{-1}\right)=0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. بين أن الدالة f متصلة على اليمين في e^{-1} .

2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

3. بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to e^{-1}\\ x>e^{-1}}} \dfrac{f(x)}{x-e^{-1}}=0$. يمكنك استعمال المتساوية :

$$\ln\left(\frac{f(x)}{x-e^{-1}}\right)=$$

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(ex)}{ex-1}\right)+(e-1)\ln(ex-1)+\frac{1-ex}{x}\ln(ex-1)+1$$

أعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

4. لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على المجال $\left]e^{-1},+\infty\right[$.

أ- بين أن :

$$\forall x\in\left]e^{-1},+\infty\right[\quad : \quad f'(x)=\frac{g(1+\ln x)}{x^2(1+\ln x)}f(x)$$

ب- حدد بدلالة α حل المعادلة $f'(x)=0$ في $\left]e^{-1},+\infty\right[$.

α هو العدد المعرف في الجزء الأول .

جـ- ضع جدول تغيرات الدالة f .

5. أدرس وضع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : $y=1$.

6. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=5cm$

$f(e^{\alpha-1})\approx 1{,}3$ و $e^{-1}\approx 0{,}4$ و $e^{\alpha-1}\approx 2{,}2$

ونقبل أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطتي انعطاف I_1 و I_2 بحيث أفصوليهما x_1 و x_2 يحققان على التوالي :

$$x_2>e^{\alpha-1} \text{ و } e^{-1}<x_1<1$$

(حساب x_1 وx_2 غير مطلوب).

التمرين 5 :

الجزء الأول : لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=x\ln|x|-(x-1)\ln|x-1| \quad ; \quad x\in\mathbb{R}^*-\{1\} \\ g(0)=g(1)=0 \end{cases}$$

1. بين أن المستقيم $(\Delta) \;:\; x=\dfrac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$.

2. أدرس اتصال وقابلية اشتقاق الدالة g في النقطة $x_0=1$.

3. أ- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=-1$.

ب- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$؟

4. أ- تحقق أن :

$$\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\quad : \quad g'(x)=\ln\left(\frac{x}{|x-1|}\right)$$

ب- أدرس إشارة $g'(x)$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

5. أ- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$ في $A\left(2,g(2)\right)$.

ب- أنشئ (T) و $(\mathscr{C}_g)$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. $\left(\ln 2\approx 0{,}7\right)$

6. ماهي إشارة $g(x)$ ؟

الجزء الثاني : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ ب:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln|x-1|}{\ln|x|} \quad ; \quad x\in\mathbb{R}^*-\{-1,1\} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1. أدرس اتصال وقابلية اشتقاق الدالة f في الصفر .

2. أحسب نهايات f عند محدات حيز تعريفها.

3. أ- بين أن :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1,1\} \quad : \quad f'(x)=\frac{g(x)}{x(x-1)\left(\ln|x|\right)^2}$$

ب- أدرس إشارة $f'(x)$ وضع جدول تغيرات الدالة f.

4. حدد تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع (Ox) وأحسب $f(-2)$، وأنشئ $(\mathscr{C}_f)$.