الثانية بكالوريا علوم رياضية	سلسلة 6 مبرهنة رول مبرهنة التزايدات المنتهية	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

1. بين أن :

$$\forall x \in]0,+\infty[\ : \ 0<\frac{x-Arc\tan(x)}{x}<\frac{x^2}{1+x^2}$$

2. استنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-Arc\tan(x)}{x^2}$.

التمرين 2 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\forall t\in[0,+\infty[\ : \ f(t)=\sin\left(\sqrt[3]{t}\right)-\sqrt[3]{t}$$

1. ليكن $x\in]0,+\infty[$. بين أن :

$$\exists c_x \in]0,x^3[\ / \ \frac{\sin(x)-x}{x^3}=\frac{1}{3}\frac{\cos\left(\sqrt[3]{c_x}\right)-1}{\left(\sqrt[3]{c_x}\right)^2}$$

2. استنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)-x}{x^3}$.

التمرين 3 :

1. ليكن $x\in[0,+\infty[$. بين أن :

$$\frac{1}{1+(x+1)^2}<Arc\tan(x+1)-Arc\tan(x)<\frac{1}{1+x^2}$$

2. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{N} \ : \ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^2}$$

بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة ، وأن :

$$\frac{\pi}{2}+1-\frac{\pi}{4}\le\lim_{n\to+\infty}u_n\le\frac{\pi}{2}+1$$

التمرين 4 :

1. بين أن لكل x من المجال $[0,+\infty[$ ، لدينا :

$$x-\frac{x^3}{6}\le\sin(x)\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

2. بين أن لكل x من المجال $\mathbb{R}$ ، لدينا :

$$1-\frac{x^2}{2}\le\cos(x)\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

3. بين أن لكل x من المجال $[0,+\infty[$ ، لدينا :

$$x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

4. استنتج النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}$$

التمرين 5 :

بين أن : $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \ : \ \left|1-\frac{x^2}{2}-\cos(x)\right|\le\frac{x^4}{24}$

التمرين 6 :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0\in\mathbb{R}^* \\ u_{n+1}=2+\dfrac{1}{u_n^2} \ : \ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

ولتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \ : \ f(x)=2+\frac{1}{x^2}$$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \ : \ u_n\ge 2$.

2. بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها α بحيث :

$$\alpha=2+\frac{1}{\alpha^2}$$

3. أ- بين أن : $\forall x\in[2,+\infty[\ : \ |f'(x)|\le\frac{1}{4}$.

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \ : \ |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$.

جـ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \ : \ |u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n|u_1-\alpha|$.

د- تحقق من أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \ : \ |u_n-\alpha|\le\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n|u_1-u_2|$$

هـ- استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 7 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\forall x\in I \ : \ f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x}$$

A. 1. أ- بين أن f متصلة على المجال $I=[0,+\infty[$.

ب- أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

و $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$

2. أ- بين أن f رتيبة قطعا على المجال $I=[0,+\infty[$.

ب- استنتج أن f تقابل من المجال $I=[0,+\infty[$ نحو مجال J ينبغي تحديده.

جـ- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال J .

B. لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $I=[0,+\infty[$ بما يلي : $\forall x\in I \quad : \quad g(x)=Arc\tan\left(f(x)\right)$.

1. بين أن g تقابل من المجال $I=[0,+\infty[$ نحو مجال K يتم تحديده.

2. حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال K .

C. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=a \quad / \quad a\in\left]0,+\infty\right[\\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n) \quad : \quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1. أ- قارن الحدين u_0 و u_1 .

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا.

2. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة .

3. حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 8 :

لتكن f دالة عددية متصلة على المجال $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]0,1[$ بحيث $f(0)=0$ و $f(1)=1$.

بين أن : $\exists c\in\left]0,1\right[\quad / \quad f'(c)=2c$.

التمرين 9 :

1. نعتبر الدالة العددية f على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{x+2}{x+1}$$

أ- بين أن f تناقصية على المجال $[0,+\infty[$ وأن :

$$\forall x\in[0,+\infty[\quad : \quad f\circ f(x)=\frac{3x+4}{2x+3}$$

ب- بين أن لكل $x\in[0,+\infty[$ ولكل $y\in[0,+\infty[$ ، لدينا :

$$\left|f\circ f(x)-f\circ f(y)\right|\le\frac{1}{9}|x-y|$$

2. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad : \quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتاليتان المعرفتان بما يلي :

$\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad x_n=u_{2n}$ و $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad y_n=u_{2n+1}$

أ- أحسب : u_1 و u_2 و u_3 .

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad x_n<\sqrt{2}<y_n$.

جـ- بين أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية وأن $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية .

3. أ- بين أن :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \left|y_{n+1}-x_{n+1}\right|\le\frac{1}{9}\left|y_n-x_n\right|$$

ب- استنتج أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتان متحاديتان.

جـ- حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 10 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-Arc\tan x}{\left|Arc\tan x\right|} \quad , \quad x\in\mathbb{R}^* \\ f(0)=0\end{cases}$$

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحنى f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I-

1. حدد $\mathscr{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .

2. أدرس زوجية f واستنتج D_E مجموعة دراسة f .

3. أدرس اتصال f في النقطة 0 .

4. أ. بين أن :

$$\forall x>0 \quad : \quad Arc\tan(x)+Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

ب. حدد المستقيم (Δ) المقارب المائل لـ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

II-

1. أ. باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن :

$$\forall x>0: \quad 0<\frac{x-Arc\tan x}{x}<\frac{x^2}{1+x^2}$$

ب. بين أن : $\forall x>0 \quad : \quad \frac{x}{1+x^2}<Arc\tan x$

2. أدرس اشتقاق الدالة f على يمين 0 وأعط تأويلا هندسيا لذلك .

3. أدرس تغيرات f على $\mathscr{D}_E$ وأعط جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

4. أ. بين أن :

$$\forall x>0: \quad f''(x)=\frac{2Arc\tan x\left(x-Arc\tan x\right)}{\left(\left(1+x^2\right)Arc\tan^2 x\right)^2}$$