التمرين 1 :

1. ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث : $|a|<1$ و $|b|<1$.

بين أن: $Arc\tan a - Arc\tan b = Arc\tan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$

2. نضع :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad f(n)=Arc\tan\left(\frac{nn!}{1+n!(n+1)!}\right)$$

أ- تحقق من أن :

$$f(n)=Arc\tan\left(\frac{1}{n!}\right)-Arc\tan\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

ب- أحسب : $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

هـ- حدد نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq1}$.

التمرين 2 :

1. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad : \quad x^3-3x-18=(x-3)(x^2+ax+b)$$

2. نضع : $t=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$.

أ- بين أن t حل للمعادلة : $x^3-3x-18=0$.

(لاحظ أن : $(u+v)^3=u^3+v^3-3uv(u+v)$)

ب- استنتج أن : $t=3$.

التمرين 3 :

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n\geq2$ ، ولتكن P_n الحدودية المعرفة بما يلي : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad : \quad P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k-1$.

1. أ- أدرس تغيرات الدالة P_n على $\mathbb{R}^+$.

ب- أحسب $P_n(0)$ و $P_n(1)$ واستنتج أن المعادلة $P_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0,1[$.

جـ- حدد u_2 .

2. بين أن : $P_n(u_{n+1})<0$ ، واستنتج أن $(u_n)_{n\geq2}$ تناقصية.

3. ليكن $x\in\mathbb{R}^+-\{1\}$.

أ- بين أن : $P_n(x)=\dfrac{x^{n+1}-2x+1}{x-1}$.

ب- استنتج أن : $u_n^{n+1}-2u_n+1=0$; $\forall n\geq2$.

4. أ- بين أن : $u_n\leq u_2<1$; $\forall n\geq2$.

ب- بين أن : $0<2u_n-1\leq u_2^{n+1}$; $\forall n\geq2$.

التمرين 4 :

نعتبر الدالة العددية f_n ، حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ ، المعرفة بما يلي :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad : \quad f_n(x)=x^3+x^2-nx-1$$

1. أ- أحسب $f_n'(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$ وحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f_n'(x)=0$. نعتبر α_n و β_n حلي هذه المعادلة مع $\alpha_n>0$

ب- بين أن : $\alpha_n^2=\dfrac{n-2\alpha_n}{3}$; $\forall n\geq2$.

واستنتج العددين الجذريين u_n و v_n بحيث :

$$f_n(\alpha_n)=u_n+v_n\alpha_n$$

جـ- ضع جدول تغيرات الدالة f_n على $\mathbb{R}^+$.

2. أ- بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_n في $\mathbb{R}^+$.

ب- بين أن : $\alpha_n<x_n<\sqrt{n}$; $\forall n\geq2$.

جـ- استنتج أن : $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

د- أدرس رتابة المتتالية العددية $(x_n)_{n\geq2}$.

3. أ- بين أن : $n=x_n^2+x_n-\dfrac{1}{x_n}$; $\forall n\geq2$.

ب- استنتج أن : $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{x_n}=1$.

التمرين 5 :

لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f_n(x)=3x^n-x-1$$

1. أ- بين أن f_n تزايدية على $\left[\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{3n}},+\infty\right[$ وتناقصية على $\left[0,\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{3n}}\right]$.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f_n.

2. أ- بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $[0,+\infty[$.

ب- استنتج إشارة $f_n(x)$ لكل x من $[0,+\infty[$.

3. أحسب $f_n(1)$ ، ثم استنتج أن : $0<u_n<1$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

4. أ- بين أن : $f_{n+1}(x)<f_n(x)$; $\forall x\in]0,1[$.

ب- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تزايدية.

جـ- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة.

5. نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

أ- بين أن : $0 \le l \le 1$.

ب- بين أن : $u_n \le l \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

جـ- بين أن : $l = 1$.

التمرين 6 :

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ولتكن الدالة العددية f_n المعرفة بما يلي :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

I. 1. أ- بين أن المعادلة $f_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا x_n في $\mathbb{R}^+$.

ب- بين أن : $x_n \in \left]0,1\right]$.

2. أ- بين أن المتتالية العددية $(x_n)_{n\ge1}$ تناقصية واستنتج أنها متقاربة.

ب- أحسب x_1 و x_2 وبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$.

3. أ- بين أن : $x_n(1 - x_n^n) = 1 - x_n \quad : \quad \forall n \ge 2$.

ب- استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

جـ- استنتج أن : $x_n \ge \dfrac{1}{2} \quad : \quad \forall n \ge 1$.

II. نضع : $\alpha = x_2$. لتكن الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

1. بين أن : $f(\alpha) = \alpha$.

2. بين أن : $f\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2},1\right]$.

3. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن : $\dfrac{1}{2} \le u_n \le 1 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ب- بين أن : $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha| \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

جـ- بين أن : $|u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وأحسب نهايتها $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

III. نضع : $\beta = x_3$. لتكن g الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

ولتكن المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = g(v_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن الدالة g تناقصية قطعا على المجال $[0,1]$.

2. أحسب $g(\beta)$ بدلالة β ..

3. بين أن : $0 \le v_n \le 1 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

4. نعتبر $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتاليتين المعرفتين كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad y_n = v_{2n}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad z_n = v_{2n+1}$$

أ- بين أن : $g(y_n) = z_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

وأن : $g(z_n) = y_{n+1} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ب- بين أن : $z_n \le \beta \le y_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

جـ- بين أن $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية واستنتج أن $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية، ثم استنتج أنهما متقاربتان.

5. لتكن $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l'$.

أ- بين أن : $g(l) = l'$ وأن : $g(l') = l$.

ب- استنتج أن l حل للمعادلة $(l^2+1)(l^3+l^2+l-1) = 0$

جـ- بين أن : $l = \beta$ و $l' = \beta$.

د- استنتج أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

التمرين 7 :

1. بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \exists! a_n \in \left]\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right[\quad / \quad \tan(a_n) = a_n$$

2. نضع : $u_n = \dfrac{\pi}{2} + (n+1)\pi - a_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

أ- أثبت أن :

$$a_n = (n+1)\pi + \mathrm{Arc}\tan(a_n) \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ب- بين أن : $a_n \ge (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

استنتج النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

جـ- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها.

التمرين 8 :

بين أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتين ، حيث :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

$$\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$