التمرين 1 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\sqrt{x+1}$$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$.
2. أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة.
3. حدد الدالة التآلفية المماسة للدالة f في $x_0=0$.
4. أعط قيمة مقربة للعدد الحقيقي $\sqrt{1,008}$.

التمرين 2 :

1. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=(1+x)^3$$

بين أن f قابلة للاشتقاق في $x_0=0$، واستنتج تقريبا للدالة f بدالة تآلفية بجوار $x_0=0$.

2. بين أن لكل x من المجال $]-1,1[$ ، لدينا $1+3x$ هي قيمة مقربة ل $(1+x)^3$ بالدقة $4x^2$.

استنتج قيمة مقربة لكل من العددين $(0.991)^3$ و $(1.008)^3$ بالدقة 4×10^{-4}.

التمرين 3 :

نعتبر الدوال f و g و h المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f(x)=2+(x-2)\sqrt{x+1}$$

$$g(x)=\sqrt{x+1}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}$$

$$h(x)=1+\frac{x}{2}-\sqrt{x+1}$$

1. أ- أدرس رتابة الدالة f .
ب- استنتج رتابة الدالة g.
جـ- أدرس رتابة الدالة h .
2. بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad : \quad 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{x+1}<1+\frac{x}{2}$.
3. استنتج تأطيرا للعدد $\sqrt{1,004}$ سعته 2×10^{-6}.

التمرين 4 :

1. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=(1+x)^3$$

بين أن f قابلة للاشتقاق في $x_0=0$، واستنتج تقريبا للدالة f بدالة تآلفية بجوار $x_0=0$.

2. بين أن لكل x من المجال $]-1,1[$ ، لدينا $1+3x$ هي قيمة مقربة ل $(1+x)^3$ بالدقة $4x^2$.

استنتج قيمة مقربة لكل من العددين $(0.991)^3$ و $(1.008)^3$ بالدقة 4×10^{-4}.

التمرين 5 :

1. بين أن لكل $x\in]0,+\infty[$ ، لدينا :

$$\cos\left(Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

و

$$\sin\left(Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. بين أن الدالة $Arc\tan$ قابلة للاشتقاق n مرة على $\mathbb{R}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$ ، وأن لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ولكل $x\in]0,+\infty[$ ، لدينا :

$$Arc\tan^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(n-1)!}{(1+x)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(nArc\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

التمرين 6 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f : \ ]-1,1[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. بين أن f قابلة للاشتقاق n مرة على المجال $]-1,1[$ ، و أن لكل $n\in\mathbb{N}$ ولكل $x\in]-1,1[$ ، لدينا :

$$f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

حيث P_n دالة حدودية تحقق العلاقة التالية :

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ P_{n+1}(x)=(1-x^2)P_n'(x)+(2n+1)xP_n(x)$$

2. أ- بين أن :

$$\forall x\in]-1,1[:\ (1-x^2)f'(x)-xf(x)=0$$

ب- استنتج أن لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، لدينا :

$$P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)-n^2(1-x^2)P_{n-1}(x)=0$$

جـ- بين أن : $P_n'=n^2P_{n-1} \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$.

د- استنتج ان لكل $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ ، لدينا :

$$n^2P_n-(2n-1)xP_n'-(1-x^2)P_n''=0 .$$

هـ- أحسب $P_n(0)$ لكل $n\in\mathbb{N}$.

التمرين 7 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1. أدرس اتصال الدالة العددية f.
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f.
3. أدرس اتصال الدالة المشتقة الأولى f'.

التمرين 8 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R}-\{\pm 1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2-1} \end{array}$$

حدد $f^{(n)}(x)$ لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ولكل $x\in\mathbb{R}-\{\pm 1\}$.

التمرين 9 :

بين أن :

1. $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[: \quad 3x<2\sin(x)\tan(x)$.
2. $\forall x\in[0,\pi] : \quad \sin^2(x)\leq\dfrac{4}{\pi^2}x(\pi-x)$.
3. $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] : \quad \dfrac{2}{\pi}x\leq\sin(x)\leq x$.

التمرين 10 :

باستعمال الدالة المشتقة ، بين أن :

$$\forall x\in]0,+\infty[\quad Arc\tan(x)+Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\forall x\in]-\infty,0[\quad Arc\tan(x)+Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

التمرين 11 :

لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نعتبر الدالة الحدودية P_n المعرفة بما يلي :

$$P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-k)=(x-1)\times(x-2)\times\ldots\times(x-n)$$

والدالة العددية f_n بحيث : $f_n(x)=\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)}$.

1. بين بالترجع أنه لكل $x\in\mathbb{R}-\{1,2,\ldots,n\}$ ، لدينا :

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-k}$$

2. استنتج أنه لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad : \quad P_n(x)P_n''(x)<\left(P_n'(x)\right)^2$$

التمرين 12 :

1. بين أن :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+ : \quad x-\frac{x^3}{3}\leq Arc\tan x\leq x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$$

2. استنتج النهاية : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{Arc\tan(x)-x}{x^3}$.

التمرين 13 :

1. لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق n مرة على مجال I.

بين **صيغة ليبنز formule de Leibnitz :**

$$\forall x\in I : \quad (fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

2. استعمل صيغة ليبنز لتحديد المشتقة من الرتبة n للدالة h ، حيث:

$h(x)=(x^3-x)\sin x$.

التمرين 14 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

1. حدد $f'(x)$ و $f''(x)$.
2. بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن لكل $n\in\mathbb{N}$ ولكل $x\in\mathbb{R}$،

لدينا : $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$

حيث $P_n(x)$ دالة حدودية من الدرجة n ، وبين أن :

$P_{n+1}(x)=(1+x^2)P_n'(x)-2(n+1)xP_n(x)$.

3. بين أن :

$$P_n(x)+2nxP_{n-1}(x)+n(n-1)(1+x^2)P_{n-2}(x)=0$$

4. استنتج أن : $P_n'(x)+n(n+1)P_{n-1}(x)=0$.
5. بين أن :

$$(1+x^2)P_n''(x)-2nxP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0$$

6. أحسب : $P_n(0)$.

التمرين 15 :

حدد الدالة المشتقة للدوال التالية :

$$g(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} \quad و \quad f(x)=Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$$

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{x-Arc\tan x}{|Arc\tan x|} & ; \quad x\in\mathbb{R}^* \\ h(0)=0 \end{cases}$$