## التمرين الأول :

I. المستوى العقدي $\mathscr{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$. لتكن $\Omega$ النقطة ذات اللحق $i$ وليكن $m\in\mathbb{R}_+^*$.

نعتبر التطبيق :

$$F_m : \mathscr{P}\setminus\{\Omega\} \to \mathscr{P}$$
$$M(z) \mapsto M'\left(z'=\frac{m}{\overline{z+i}}+i\right)$$

1. بين أن $F_m(M)\neq\Omega$ , $\forall M\in\mathscr{P}\setminus\{\Omega\}$.
2. بين أن :
$$\forall M\in\mathscr{P}\setminus\{\Omega\} , (F_m\circ F_m)(M)=M$$
3. حدد المجموعة :
$$\mathscr{A}=\{ M\in\mathscr{P}\setminus\{\Omega\} / F_m(M)=M \}.$$
4. لتكن $M\in\mathscr{P}\setminus\{\Omega\}$. نضع $F_m(M)=M'$. بين أن :
 أ- النقط $\Omega$ و $M$ و $M'$ مستقيمية.
 ب- $\overrightarrow{\Omega M}\cdot\overrightarrow{\Omega M'}=m$.
5. ليكن $r\in\mathbb{R}_+^*$ ولتكن $(\Gamma)$ الدائرة التي مركزها $\Omega$ وشعاعها $r$
بين أن $F_m(\Gamma)$ دائرة محددا مركزها وشعاعها.

II. لتكن $A$ و $B$ و $C$ و $D$ أربع نقط مختلفة مثنى مثنى من $\mathscr{P}\setminus\{\Omega\}$ ألحاقها على التوالي $a$ و $b$ و $c$ و $d$. نضع :

$$[A,B,C,D]=\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

1. بين أن : $[A,B,C,D]=[C,D,A,B]$.
2. بين أن $[A,B,C,D]\in\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كانت النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ مستقيمية أو متداورة.
3. نضع : $F_m(A)=A'$ و $F_m(B)=B'$ و : $F_m(C)=C'$ و $F_m(D)=D'$.
بين أن : $[A',B',C',D']=\overline{[A,B,C,D]}$.
4. بين أن $A$ و $B$ و $A'$ و $B'$ مستقيمية أو متداورة.

## التمرين الثاني :

في المجموعة $\mathbb{C}$، نعتبر قانون التركيب الداخلي * المعرف لكل $z=x+iy$ ولكل $z'=x'+iy'$ من $\mathbb{C}$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ و $(x',y')\in\mathbb{R}^2$ كما يلي :

$$z*z'=xx'+i(xy'+yx')$$

1. أ- أثبت أن * تبادلي وتجميعي.
 ب- أثبت أن * يقبل عنصرا محايدا.
 جـ- هل $(\mathbb{C},*)$ زمرة ؟
2. نضع : $G=\{ z\in\mathbb{C} / \Re e(z)\neq 0 \}$.
بين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية.
3. نضع :
$$H=\{ z=x+iy\in\mathbb{C} / x>0 \text{ و } y=x\ln x \}$$
 أ- بين أن $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$.
 ب- أنشئ صورة $H$ في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$.
4. ليكن $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. نعرف المتتالية العددية $\left(z^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ كما يلي :
$$\begin{cases} z^{(1)}=z \\ z^{(p+1)}=z^{(p)}*z \quad ; \quad p\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$
 أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* , z^{(n)}=x^n+nx^{n-1}yi$.
 ب- نضع : $z=j$ ، و $S_n=1+j+j^{(2)}+\ldots+j^{(n)}$.
مع $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. أحسب $S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\Re e(S_n)$

## التمرين الثالث :

1. ليكن $p$ عددا صحيحا طبيعيا أوليا. بين أن :
$$\forall n\in\mathbb{N} , p/n^2 \Leftrightarrow p/n$$
2. بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين أوليين $p$ و $q$ بحيث $p\neq q$، العدد $pq$ ليس مربعا كاملا.
3. ليكن $\alpha$ و $\beta$ عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين وأوليين فيما بينهما. نفترض أن $\beta<\alpha$ و $\alpha$ عدد زوجي و $\beta$ عدد فردي.
نضع : $x=\alpha^2-\beta^2$ و $y=2\alpha\beta$ و $z=\alpha^2+\beta^2$.
 أ- تحقق من أن : $x^2+y^2=z^2$.
 ب- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي $p$ بحيث $p\geq 3$، لدينا:
$$(p/x \text{ و } p/y) \Rightarrow (p/\alpha \text{ و } p/\beta)$$
 جـ- استنتج أن الأعداد $x$ و $y$ و $z$ أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى.
4. لتكن $x$ و $y$ و $z$ أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى بحيث $x^2+y^2=z^2$.

أ- بين أن : $\left( y \equiv 1\ [2] \quad و \quad x \equiv 0\ [2] \right)$

أو : $\left( y \equiv 0\ [2] \quad و \quad x \equiv 1\ [2] \right)$

ب- نضع : $x = 2u$ و $z + y = 2v$ و $z - y = 2w$.

بين أن : $u^2 = vw$ وأن $u \wedge v = 1$ ، ثم بين أن $v$ و $w$ مربعان كاملان.

5. استنتج حلول المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$ في $\mathbb{N}^3$.

**التمرين الرابع :**

نعتبر المجموعة :

$$E = \left\{ M_{(a)} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ ae^a & e^a \end{pmatrix} \ / \ a \in \mathbb{Z} \right\}$$

والتطبيق $\psi$ المعرف بما يلي :

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{Z} & \to & E \\ & a & \mapsto & M_{(a)} \end{array}$$

1. أ- بين أن $E$ جزئ مستقر من $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \times\right)$.

ب- بين أن $\psi$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z}, +)$ نحو $(E, \times)$.

جـ- استنتج بنية $(E, \times)$ ، ثم حدد العنصر المحايد ل $\times$ في $E$ و ومقلوب $M_{(a)}$ حيث $M_{(a)} \in E$.

2. لكل $a \in \mathbb{Z}$ ، نضع : $M_{(a)}^0 = I$ حيث $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

و $M_{(a)}^1 = M_{(a)}$.

و $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ M_{(a)}^{n+1} = M_{(a)}^n \times M_{(a)}$

$$\forall p \in \mathbb{Z}_-^* \ , \ M_{(a)}^p = \left(M_a^{-1}\right)^{-p}$$

أ- بين أن : $\forall p \in \mathbb{Z} \ , \ M_{(a)}^p = M_{(na)}$.

ب- ناقش ، حسب قيم $n$ من $\mathbb{Z}$ ، حلول المعادلة :

$$x \in \mathbb{Z} \ , \ M_{(x)}^n \times M_{(5)} = M_{(5n)}$$

3. ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}^*$. لكل $x$ من $\mathbb{Z}$ ، نضع :