التمرين 1 :

نزود المجموعة $\mathbb{R}^2$ بقانون التركيب الداخلي * بحيث :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ , \ \forall(x',y')\in\mathbb{R}^2 \ :$$
$$(x,y)*(x',y')=(x+x'+xx',y+y')$$

ونعتبر المجموعة : $G=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x\neq -1\ \}$.

1. أ- بين أن $(G,*)$ جزء مستقر من $(\mathbb{R}^2,*)$.

(لاحظ أن : $x+x'+xx'+1=(x+1)(x'+1)$)

ب- بين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية .

2. نعتبر المجموعة: $B=\{\ (x,\ln(x+1)) \ / \ x\in]-1,+\infty[\ \}$

بين أن $(B,*)$ زمرة جزئية ل $(G,*)$.

التمرين 2 :

نضع : $I=]0,+\infty[$.

1. بين أن : $\forall(x,y)\in I^2 \ : \ e^{x+y}-e^x-e^y+2>1$

2. نعرف على I قانون التركيب الداخلي $\perp$ بما يلي :

$$\forall(x,y)\in I^2 \ : \ x\perp y=\ln\left(e^{x+y}-e^x-e^y+2\right)$$

أ- نعتبر التطبيق :
$$\begin{array}{llll} f & : I & \to & I \\ & x & \mapsto & \ln(x+1) \end{array}$$

أثبت أن التطبيق f تقابل .

ب- برهن على أن f تشاكل من $(I,\times)$ على $(I,\perp)$.

جـ- استنتج بنية $(I,\perp)$.

التمرين 3 :

$\mathscr{P}$ يرمز إلى المستوى المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. ليكن * قانون التركيب الداخلي في $\mathscr{P}$ المعرف كالتالي :

إذاكانت $M_1(x_1,y_1)$ و $M_2(x_2,y_2)$ نقطتين من $\mathscr{P}$ ، فإن M_1*M_2 هي النقطة التي زوج إحداثيتيها (X,Y) بحيث :

$$\begin{cases} X=x_1+x_2+x_1x_2 \\ Y=y_1+y_2 \end{cases}$$

1. ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $x=-1$. بين أن :

$$M_1*M_2\in(D) \iff \left(M_1\in(D) \text{ أو } M_2\in(D)\right)$$

2. ليكن $S=\mathscr{P}-(D)$. بين أن $(S,*)$ زمرة تبادلية .

3. ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الذي معادلته : $y=\ln(x+1)$.

أ- أرسم $(\mathscr{C})$.

ب- بين أن $(C,*)$ زمرة جزئية ل $(S,*)$.

التمرين 4 :

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة واحدية بحيث :

(1) : $\forall x\in A \ , \ x^6=x$.

1. أ- بين أن : $\forall x\in A \ , \ x^6=-x$.

ب- استنتج أن : $\forall x\in A \ , \ 2x=0$.

2. أ- ليكن $x\in A$. أنشر $(x+1)^6$.

ب- استنتج أن : $\forall x\in A \ , \ x^4+x^2=0$.

جـ- استنتج أن : $\forall x\in A \ , \ x^2=x$.

د- استنتج أن $(A,+,\times)$ حلقة تبالية.

3. ليكن $n\in\mathbb{N}$ حيث $n\geq 2$. حدد جميع الأعداد الطبيعية n بحيث $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ يحقق العلاقة (1) .

التمرين 5 : حلقـــة بـــول

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة بحيث : $\forall x\in A \ , \ x^2=x$.

1. بين أن : $\forall x\in A \ , \ 2x=0$ ، ثم استنتج أن A حلقة تبادلية

2. بين أن : $\forall(x,y)\in A^2 \ , \ x\times y\times(x+y)=0$.

3. ماذا يمكن أن تستنتجه إذا كانت A كاملة .

التمرين 6 :

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة واحدية. لكل $x\in A$ و لكل $n\in\mathbb{N}$ ،

نضع : (n مرة) $\quad x+x+\ldots+x=nx$

(n من العوامل) $\quad x\times x\times\ldots\times x=x^n$

نفترض أن : $\forall x\in A \ , \ x^3=x$.

1. بين أن : $\forall x\in A \ , \ 6x=0$.

(يمكن نشر $(x+1)^3$ و $(x-1)^3$)

2. استنتج أن :

أ- $\forall x\in A \ , \ \exists(\alpha,\beta)\in 2A\times 3A \ / \ x=\alpha+\beta$

ب- $2A\cap 3A=\{0\}$.

التمرين 7 :

نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي* المعرف بما يلي :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ , \ x*y=x+y-3xy$$

1. أ- تحقق من أن لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ، لدينا :

$(1-3x)\times(1-3y)=1-3(x*y)$

ب- بين أن $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ زمرة تبادلية.

2. أ- نعتبر التطبيق φ الذي يربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي $\varphi(x)=1-3x$ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ نحو $(\mathbb{R}^*,\times)$.

ب- بين أن : $\varphi(\mathbb{R}_+^*)=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$.

جـ- بين أن $\left(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[,*\right)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$.

3. لكل x من المجموعة $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$، ولكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ x^{(n+1)}=x^{(n)}*x \quad و \quad x^{(0)}=0$$

أ- بين أن :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \varphi\left(x^{(n)}\right)=\left(\varphi(x)\right)^n$$

ب- استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n .

4. مزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بما يلي :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ x\top y=x+y-\frac{1}{3}$$

أ- بين أن : $(\mathbb{R},\top)$ زمرة تبادلية.

ب- بين أن : $(\mathbb{R},\top,*)$ جسم تبادلي.

التمرين 8 :

تذكير : $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي و $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

نضع : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}$ و

$$E=\left\{M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}\,b\\-\frac{1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1. أ- بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$.

ب- بين أن الأسرة (I,J) أساس في الفضاء المتجهي $(E,+,.)$.

2. ليكن $E^*=E\setminus\left\{M_{(0,0)}\right\}$ ، نعتبر التطبيق :

$$\begin{array}{llcl} f\ : & \mathbb{C}^* & \to & E^* \\ & a+ib\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2 & \mapsto & M_{(a,b)} \end{array}$$

أ- بين أن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

ب- بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

3. بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

4. حل في E المعادلة : $J\times X^3=I$

(حيث : $X^3=X\times X\times X$)

التمرين 9 :

نعتبر في $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ المصفوفتين التاليتين :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad و \quad A=\begin{pmatrix}0&0&3\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

نذكر أن : $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

و أن : $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

1. بين أن الأسرة (I,A,A^2) حرة في $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),+,.)$.

2. أ- أحسب A^2 و A^3 ثم A^n بدلالة n من $\mathbb{N}^*$

(ناقش حسب بواقي قسمة n على 3) .

ب- تحقق من أن A تقبل مقلوبا A^{-1} ينبغي تحديده .

3. لتكن المجموعة :

$$E=\left\{\begin{array}{l} M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\ \ /\ \ \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\ , \\ M=aI+bA+cA^2 \end{array}\right\}$$

أ- بين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

ب- تحقق من أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

جـ- حدد أساسا لـ E .

4. أ- بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية .

ب- أحسب محددة المصفوفة : $A^2+A-\sqrt[3]{3}$.

جـ- هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ علل جوابك .