لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$ و $g(x)=\ln(1+x)$.

نعتبر $\left(\mathscr{C}_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I. 1. أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. أ- تحقق من أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f(x)=-x+\ln\left(1+e^{x}\right)$.

ب- استنتج أن المنحنى $\left(\mathscr{C}_f\right)$ يقبل مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ينبغي تحديده.

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى $\left(\mathscr{C}_f\right)$ والمستقيم (Δ).

3. أ- ضع جدول تغيرات الدالة f.

ب- أدرس تقعر المنحنى $\left(\mathscr{C}_f\right)$.

4. أنشئ $\left(\mathscr{C}_f\right)$ و المستقيم (Δ) والمماس (T) للمنحنى $\left(\mathscr{C}_f\right)$ في النقطة ذات الأفصول 0.

5. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال I ينبغي تحديده ، ثم حدد $f^{-1}(x)$ لكل $x\in I$.

II. 1. بين أن : $\forall t\geq 0\ ,\ t-\dfrac{t^2}{2}\leq g(t)\leq t$ ،

ثم استنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ e^{-x}-\dfrac{e^{-2x}}{2}\leq f(x)\leq e^{-x}$.

2. لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $a_n=\int_0^n f(x)\,dx$.

أ- بين أن $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة. نضع : $a=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. أعط تأويلا هندسيا للعدد a.

ب- بين أن : $\dfrac{3}{4}\leq a\leq 1$.

3. لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\times\ldots\times\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

III. لكل $x\in\left]-1,1\right[$ و لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع :

$$g_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k=x+\frac{(-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

1. بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ g(x)=g_n(x)+\int_0^x(-1)^n\dfrac{t^n}{1+t}\,dt$.

2. نضع : $R_n(x)=g(x)-g_n(x)$.

بين أن : $\lim_{n\to+\infty} R_n(x)=0$ ، ثم استنتج أن : $\lim_{n\to+\infty} g_n(x)=g(x)$.

3. نضع : $x=-\dfrac{1}{2}$. حدد أصغر عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث :

$$n\geq n_0 \;\Rightarrow\; \left|g\left(-\frac{1}{2}\right)-g_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right| < 10^{-2}$$

4. ليكن $p\in\mathbb{N}^*$ وليكن $x\in\left[\dfrac{1}{p},p\right]$.

أ- بين أن : $g_n(e^{-x})-\dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq f(x) \leq g_n(e^{-x})+\dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$ ، $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

ب- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n=1+\dfrac{(-1)}{2^2}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

بين أن : $u_n-\dfrac{1}{(n+1)^2} \leq a \leq u_n+\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

بين أن : $a=\lim_{p\to+\infty}\int_{\frac{1}{p}}^{p} f(x)\,dx$ ، ثم استنتج أن : $a=\lim_{n\to+\infty} u_n$.

استنتج تأطيرا للعدد a إلى 10^{-1}.

تمريـــــن 1

I. حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة التالية : $\begin{cases} a+b=360 \\ a\wedge b=18 \end{cases}$.

II. ليكن $a\in\mathbb{Z}$ و $p\in\mathbb{Z}$.

1. بين أنه إذا كان : p أوليا وكان p لا يقسم a ، فإن : $p\wedge a=1$.
2. أ- حدد a و b بحيث :

$$\forall k\in\mathbb{Z} \;:\; 9k+4=a(2k-1)+k+8 \;;\; 2k-1=b(k+8)-17.$$

ب- استنتج أن :

$$k\equiv 9\;[17] \quad \Rightarrow (9k+4)\wedge(2k-1)=17$$
$$k\not\equiv 9\;[17] \quad \Rightarrow (9k+4)\wedge(2k-1)=1$$

تمريـــــن 2

1. حل في $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} \bar{2}x+\bar{6}y=\bar{4} \\ x-\bar{3}y=\bar{0} \end{cases} \;:\; (*)$.
2. أ- أوجد جميع الأزواج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث يكون العددان $2a+6b-4$ و $a-3b$ قابلين للقسمة على 8 في آن واحد.

ب- لكل حل ، ماهو باقي القسمة الأقليدية للعدد $a+b$ على 8.

3. استنتج شرطا لازما وكافيا لكي يكون زوج أعداد فردية a و b ، حلا للنظمة $(*)$.