

**التمرين الأول :**

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x-1} \frac{\ln(x)}{2} ; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

وليكن  $(\mathcal{E}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. بين أن  $f$  دالة متصلة على المجال  $]0, +\infty[$ .
2. أحسب  $f'(x)$  لكل  $x \in ]0, 1[$  ولكل  $x \in ]1, +\infty[$  ، ثم أدرس رتابتها على كل من هذين المجالين.
3. بين أن لكل  $x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  لدينا :

$$f'(x) = \frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$$

4. أ- بين أن لكل  $x \in ]0, +\infty[$  لدينا :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

ب- استنتج أن  $f$  قابلة للاشتقاق في 1 وحدد  $f'(1)$ .

ج- بين أن  $f'$  متصلة على المجال  $]0, +\infty[$ .

5. أ- بين أن :

$$\forall x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[ : \ln(x) < (x-1)$$

ب- استنتج أن :  $\forall x \in ]1, +\infty[ : f(x) < x$ .

6. أنشئ  $(\mathcal{E}_f)$ .

**التمرين الثاني :**

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}}$$

1. أحسب  $f(0)$ .

2. بين أن :  $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ .

3. هل الدالة متصلة في 0 ؟

4. لكل  $x \in \mathbb{R}$  ، نضع :  $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k e^{\frac{kx}{n}}$

أحسب  $g(0)$ .

5. لتكن  $h$  الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$\forall t \in [0, +\infty[ : h(t) = e^{\sqrt{t}} - \sqrt{t}$$

أ- ليكن  $x \in ]0, +\infty[$  . باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية،

بين انه يوجد عدد حقيقي  $c$  من المجال  $]0, x^2[$  بحيث :

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{\sqrt{c}} - 1}{\sqrt{c}} \right)$$

ب- استنتج أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين 0 وأحسب

$$f'_d(0)$$

**التمرين الثالث :****الجزء الأول :**

1. نعتبر الدالة العددية  $u$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$u(x) = (2-x)e^x - 2$$

1. أدرس تغيرات الدالة  $u$ .

2. بين أن المعادلة  $u(x) = 0$  تقبل بالضبط حلين مختلفين في

$\mathbb{R}$  . نرمز للحل الغير المنعدم ب  $\alpha$  . تحقق من أن :

$$1 < \alpha < 2$$

3. استنتج إشارة  $u(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

II. لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

وليكن  $(\mathcal{E}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. بين أن الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .

2. أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، ثم حدد

الفرعين اللانهائيين للمنحنى  $(\mathcal{E}_f)$ .

3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  في 0 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة.

4. بين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ، و بين أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{x u(x)}{(e^x - 1)^2}$$

5. ضع جدول تغيرات الدالة  $f$ .

6. أنشئ  $(\mathcal{E}_f)$  . (نعطي :  $\alpha \approx 1,6$ )

### الجزء الثاني :

لتكن  $F$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بما يلي :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1. بين أن  $F$  متصلة وتزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}^+$ .

$$2. \text{ لكل } x \in \mathbb{R}^+ \text{ ، نضع : } G(x) = \int_{\ln 2}^x t^2 e^{-t} dt$$

أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، أحسب  $G(x)$  ، ثم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$  .

ب- بين أن :  $\forall t \in [\ln 2, +\infty[ : f(t) \leq 2 t^2 e^{-t}$

ج- استنتج أن  $F$  مكبورة على  $\mathbb{R}^+$  . نقبل أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$

وأن  $L \in \mathbb{R}$

### الجزء الثالث :

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

1. بين أن لكل  $x > 0$  ، لدينا :

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$

2. بين أن :  $\forall x > 0 : 0 \leq \int_0^x f(t) dt \leq \frac{\alpha(2-\alpha)}{n}$

3. أحسب :  $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt$  لكل  $x \in [0, +\infty[$

4. استنتج أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) = \frac{2}{n^3}$

1. بين أن لكل  $x \in [0, +\infty[$  ، لدينا :

$$F(x) = \sum_{k=1}^{k=n} I_k(x) + \int_0^x f(t) e^{-nt} dt$$

2. لتكن  $h_n$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بما يلي :

$$h_n(x) = \int_0^x f(t) e^{-nt} dt$$

بين أن الدالة  $h_n$  تقبل نهاية منتهية  $I_n$  ، عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  ،

$$\text{وأن : } L - I_n = 2 \left( 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \right)$$

3. بين أن  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متتالية متقاربة وأن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

4. نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفة بما يلي :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$$

بين أن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متتالية متقاربة وأن نهايتها  $L'$  تحقق ما يلي :

$$L = 2L'$$

### التمرين الرابع :

لكل  $n \in \mathbb{N}$  ، نعتبر الدالة العددية  $f_n$  المعرفة على المجال

$$]0, +\infty[ \text{ بما يلي : } f_n(x) = n x + \ln(x)$$

1. بين أن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $x_n$  في  $\mathbb{R}$  ،

وأن  $x_n \in ]0, 1[$

2. أ- بين أن :  $\forall x \in ]0, +\infty[ : f_{n+1}(x) > f_n(x)$

ب- استنتج أن :  $f_{n+1}(x_n) > 0$  ، وأن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية

تناقصية.

3. أ- بين أن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة.

نضع :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$

ب- بين أن :  $l \notin ]0, 1[$

ج- استنتج أن :  $l = 0$

4. أ- بين أنه إذا كان  $n \geq 3 > e$  ، فإن :  $x_n > \frac{1}{n}$

ب- أدرس إشارة  $x - \ln(x)$  ، واستنتج أن :  $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

ج- ماذا تستنتج ؟

### التمرين الخامس :

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  . نضع :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt$$

و  $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$

1. أحسب  $u_0$  و  $u_1$

2. بين أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية تزايدية .

3. أ- بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$

ب- أحسب  $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$  . ماذا تستنتج ؟

4. أ- تحقق من أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt$$

ب- استنتج أن :  $\forall n \in \mathbb{N} : \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{1+n}$

ج- أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

بسم الله الرحمن الرحيم  
الحمد لله رب العالمين  
والصلاة والسلام على  
سيدنا محمد وآله الطيبين  
الطاهرين