التمريـــــن 1 :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2.
نعتبر f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x)=\frac{x}{n}-e^{-nx}$$

ليكن $(\mathscr{C}_n)$ التمثيل المبياني للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$.
ب- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$.
2. أحسب $f_n'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$، ثم ضع جدول تغيرات f_n.
3. أ- بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$.
ب- بين أن : $f_n\left(\frac{1}{n}\right)<0$.
جـ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ e^x\geq x+1$ ، ثم استنتج أن :
$f_n(1)>0$.
د- بين أن : $\frac{1}{n}<\alpha_n<1$.
4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_2)$. (نأخذ : $\alpha_2\approx 0,6$)
5. أ- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 2، لدينا:

$$f_{n+1}(\alpha_n)=\frac{n\,e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n}-\frac{1}{n}-1\right)$$

ب- استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ :\ f_{n+1}(\alpha_n)\geq 0$.
جـ- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية ، ثم استنتج أنها متقاربة.
6. أ- استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ :\ \frac{1}{n^2}<e^{-n\alpha_n}<\frac{1}{n}$.
ب- استنتج أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ :\ \frac{\ln(n)}{n}<\alpha_n<\frac{2\ln(n)}{n}$$

جـ- حدد $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$.

التمريـــــن 2 :

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{-\frac{2}{x}} & ;\quad x>0 \\ f(0)=0 & \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.

1. أ- بين أن f متصلة على اليمين في 0.
ب- بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.
جـ- بين أن f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.
2. أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
ب- بين أن : $\forall t\geq 0\ :\ 0\leq e^{-t}+t-1\leq\frac{t^2}{2}$.
جـ- بين أن :

$$\forall x>0\ :\ -\frac{4}{x}\leq f(x)-x\leq\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}.$$

د- استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديد معادلة له.
3. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم (Δ).

II. n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.
نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x)=\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}} & ;\quad x>0 \\ f_n(0)=0 & \end{cases}$$

1. بين أن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.
2. أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0,+\infty[$.
3. أ- بين أن، لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة $f_n(x)=\frac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty[$.
ب- بين أن: $(\forall x>0)\ ,\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :$

$$f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}>f_n(x)-\frac{2}{n}$$

جـ- استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ تناقصية، ثم بين أن $(a_n)_{n\geq 1}$ متقاربة. نضع : $a=\lim_{n\to+\infty}a_n$.
د- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ na_n=2e^{\frac{2}{a_n}}-2$.
هـ- بين أن : $a=0$.

التمريـــــن 3 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}} & ;\quad x\neq 0\quad ,\quad x\neq 1 \\ f(0)=1 & ;\quad f(1)=0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أدرس الاتصال على اليمين ثم الاشتقاق على اليمين للدالة f عند النقطة 0.
2. أ- أدرس الاتصال على اليسار ثم الاشتقاق على اليسار للدالة f عند النقطة 1.

ب- هل الدالة f متصلة عند النقطة 1 ؟

3. أدرس تغيرات الدالة f .
4. أ- بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$ كمحور تماثل .

ب- حدد نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (D) .

جـ- أرسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

التمريـــــن 4 :

ليكن m عددا حقيقيا **سالبا قطعا** و f_m الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_m(x)=\dfrac{1}{x}e^{\left(\frac{mx}{x-1}\right)} & ; \quad x\neq 1 \\ f_m(1)=0 & \end{cases}$$

1. أ- أحسب نهايات f_m عند محدات $\mathbb{R}^*$.

ب- أدرس اتصال f_m في النقطة 1 على اليمين وعلى اليسار .

جـ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_m في النقطة 1 على اليمين .

2. أ- بين أنه :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*-\{1\}:\ f_m'(x)=-\frac{x^2+(m-2)x+1}{x^2(x-1)^2}e^{\left(\frac{mx}{x-1}\right)}$$

ب- أثبت أن $f_m'(x)$ تنعدم من أجل قيمتين x_1 و x_2 تحققان $0<x_1<1<x_2$.

جـ- أعط جدول تغيرات الدالة f_m .

(حساب $f_m(x_1)$ و $f_m(x_2)$ غير مطلوب)

3. نضع في كل ما يلي : $f_{-\frac{1}{2}}=f$.

أ- أرسم المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم . (وحدة القياس 2cm)

(نأخذ : $\frac{1}{e}\approx 0,4$ و $\sqrt{e}\approx 1,65$)

(تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب)

ب- نضع لكل عدد حقيقي x من المجال $[2,+\infty[$:

$$F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$$

i) بين أن F قابلة للإشتقاق على $[2,+\infty[$ وأحسب $F'(x)$.

ii) أثبت أنه : $\forall x\in[2,+\infty[\ : \ e^{\left(\frac{-x}{2x-2}\right)}<e^{\left(\frac{-x}{2x-1}\right)}$.

واستنتج أن F تزايدية قطعا على المجال $[2,+\infty[$.

iii) أثبت أنه :

$$\forall x\in[2,+\infty[\ : \ x f(2x)\leq F(x)\leq x f(x)$$

iv) استنتج أنه :

$$\forall x\in[2,+\infty[\ : \ \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}}\leq F(x)\leq e^{-\frac{1}{2}}$$

التمريـــــن 5 :

I . نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$$

1. حدد $\mathscr{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .
2. أدرس تغيرات الدالة f ؛ واستنتج إشارة f على $\mathscr{D}_f$.

II . نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي: $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

1. حدد $\mathscr{D}_g$ حيز تعريف الدالة g.
2. أدرس تغيرات الدالة g .
3. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \ : \ 2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e$.
4. استنتج أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \ : \ \left(\frac{n+1}{e}\right)^n\leq n!\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

5. ليكن $a\in\mathbb{R}$. استنتج مما سبق النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}$.

III . لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ؛ نعتبر الدالة h_n المعرفة بما يلي :

$$h_n(x)=-e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

1. حدد الدالة المشتقة للدالة h_n .
2. ليكن a عنصرا من $\mathbb{R}^*$. باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية للدالة h_n ما بين 0 و a ؛ بين أن :

$$\left|1+a+\frac{a^2}{2!}+\ldots+\frac{a^n}{n!}-e^a\right|\leq e^{|a|}\times\frac{|a|^n}{n!}$$

3. استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}$.

بين أن : $\forall x\in[0,+\infty[\ : \ \frac{x^2}{2}\leq e^x-1-x\leq\frac{x^2}{2}e^x$

ثم أحسب النهاية التالية : أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x^2}$.