التمرين 1 :

I. لكل $z \in \mathbb{C}$ ، نضع :

$$P(z) = z^3 - (5+5i)z^2 + (2+22i)z + 8 - 24i$$

1. أحسب $P(2)$.
2. حدد العددين العقديين a و b بحيث يكون :

$$\forall z \in \mathbb{C} \; : \; P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$$

3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) \; : \; P(z) = 0$.

نعتبر z_0 و z_1 و z_2 حلول المعادلة (E) بحيث :

$$|z_0| < |z_1| < |z_2|$$

II. المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي z_0 و z_1 و z_2.

1. بين أن O و A و B و C نقط متداورة.
2. نضع : $u = \dfrac{z - z_2}{z - z_1}$. حدد مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى العقدي $\mathcal{P}$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ- $\arg(u) \equiv \dfrac{\pi}{2} \; [2\pi]$.

ب- $u \in \mathbb{R}$.

جـ- $\arg(u) \equiv \dfrac{\pi}{3} \; [2\pi]$.

د- $|u| = 2$.

هـ- $2\arg(u) \equiv 2\overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})} \; [2\pi]$.

التمرين 2 :

ليكن : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. نضع : $\alpha = \omega + \omega^2 + \omega^4$.

1. أحسب $\alpha + \overline{\alpha}$ و $\alpha\overline{\alpha}$.
2. استنتج أن :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

التمرين 3 :

علما أن لها حل حقيقي ، حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية :

$$z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i) = 0$$

التمرين 4 :

نعتبر العدد العقدي $u = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$.

1. أحسب u^2 ، ثم حدد معياره وعمدته.
2. استنتج الشكل المثلثي للعدد العقدي u.
3. استنتج : $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
4. أوجد الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي من أجلها يكون u^n عددا حقيقيا.

التمرين 5 :

المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نضع : $\forall z \in \mathbb{C} - \{4+3i\} \; : \; f(z) = \dfrac{z - 3 + 4i}{z - 4 - 3i}$.

1. أحسب العدد $\sigma = f(10 - 5i)$ ، ثم أكتبه على الشكل الجبري وعلى الشكل المثلثي.
2. نعتبر النقطتين A و B اللتان لحقاهما على التوالي هما : $a = 4 + 3i$ و $b = 3 - 4i$.

أ- حدد المجموعتين التاليتين :

$$(\Gamma_1) = \{ M(z) \in \mathcal{P} \; / \; |f(z)| = 1 \}$$

$$(\Gamma_2) = \{ M(z) \in \mathcal{P} \; / \; f(z) \in i\mathbb{R} \}$$

ب- تحقق من أن $O \in (\Gamma_1) \cap (\Gamma_2)$ ، ثم مثل المجموعتين (Γ_1) و (Γ_2) .

3. لتكن M_n النقطة ذات اللحق $z_n = \sigma^n$.

أ- حدد قيم الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي من أجلها يكون M_n نقطة من المحور الحقيقي $(O, \vec{u})$.

ب- تحقق من أن $M_{2004} \in (O, \vec{u})$.

جـ- حدد قيم الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي من أجلها يكون $OM_n \leq 10^{-3}$.

التمرين 6 :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية :

$$z^2 - az + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

حيث : a عدد حقيقي.

وليكن z_0 و z_1 حلي المعادلة (E).

1. بين أن : $\arg(z_0)+\arg(z_1)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، وأن : $|z_0||z_1|=1$.

2. أ- نضع : $z_0=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$. حيث θ عدد حقيقي.

بين أن : $a=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

ب- استنتج أنه إذا كان $z_0=i$ ، فإن :

$$1+ia-a^2-ia^3+a^4+ia^5=0$$

3. نفترض أن : $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

أ- حدد العدد z_1 على الشكل الجبري وعلى الشكل المثلثي، ثم

استنتج قيمتي $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

ب- حدد العدد العقدي a على الشكل الجبري وعلى الشكل المثلثي.

4. في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر التحويل R المرتبط بالتطبيق r المعرف من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي : $r(z)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)z$.

لتكن A و M_0 و M_1 النقط التي ألحاقها على التوالي هي a و z_0 و z_1 حيث : $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

أ- حدد طبيعة وعناصر التحويل R.

ب- بين أن : $R(M_1)=M_1$، ثم استنتج طبيعة الرباعي OM_0AM_1.

جـ- استنتج عمدة ومعيار العدد العقدي a.

التمرين 7 :

1. بين أن $\alpha=e^{i\frac{2\pi}{5}}$ حل للمعادلة :

$$(E)\ :\ 1+z+z^2+z^3+z^4=0$$

2. ليكن ξ عدد عقدي غير منعدم ، وليكن : $u=\xi+\frac{1}{\xi}$.

بين أنه إذا كان ξ حل للمعادلة (E) ، فإن u حل للمعادلة :

$$(F)\ :\ z^2+z-1=0.$$

3. استنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

التمرين 8 :

المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$،

نعتبر التطبيق F الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=2\left(\frac{z-1}{z}\right)$.

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)\ :\ z'=z$ ، واستنتج النقط الصامدة بالتطبيق F.

2. أكتب الحلول على الشكل المثلثي.

3. نعتبر z_1 و z_2 حلي المعادلة $(*)$. بين أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ :\ z_1^{8n}+z_2^{8n}=2^{4n+1}$$

4. نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي : $z_A=1+i$ و $z_B=1-i$.

أ- أثبت أن :

$$\forall z\in\mathbb{C}-\{z_A,z_B\}\ :\ \frac{z'-z_B}{z'-z_A}=i\,\frac{z-z_B}{z-z_A}.$$

ب- استنتج أن : $\frac{M'B}{M'A}=\frac{MB}{MA}$ ، وأعط قياسا للزاوية $(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B})$ بدلالة أحد قياسات الزاوية $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$.

جـ- حدد صورة المستقيم (AB) بالتطبيق F.

5. نضع $z=e^{i\theta}$ ، حيث $\theta\in[0,\pi]$.

أ- أكتب z' على الشكل المثلثي.

ب- حدد مجموعة النقط $M'(z')$ التي من أجلها يتغير θ في المجال $[0,\pi]$.

التمرين 9 :

لكل $z\in\mathbb{C}-\{i\}$ ، نضع : $f(z)=\frac{z+i}{iz+1}$.

1. أ- حل في $\mathbb{C}$ العادلة : $f(z)=2$.

ب- حل في $\mathbb{C}$ العادلة : $f(z)=-\frac{1}{z}$.

2. أثبت أن : $\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}\ :\ f(z)=1\Leftrightarrow|z|=1$.

3. حدد المجموعة : $(\Delta)=\left\{M(z)\in\mathcal{P}\ /\ |f(z)=1|\right\}$

4. أ- أثبت أن :

$$\arg(f(z))\equiv-\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\ [2\pi]$$

ب- حدد المجموعة :

$$(E)=\left\{M(z)\in\mathcal{P}\ /\ f(z)\in\mathbb{R}^+\right\}$$